Mathématiques

Théme : Intégrale

Calcul d’aire

Exercice N°1

1°) Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

b) En déduire la primitive F_0 de g sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2°) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x) = x\cos(2x)$ et soit **C** sa courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $f(x)\geq 0$ puis calculer l'aire de la région limitée par la courbe **C** et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

1°) Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

$$g(x) = ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x^2+2x+1)+c}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$

1°) Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

$$g(x)=\frac{ax^3+2ax^2+ax+bx^2+2bx+b+c}{(x+1)^2}$$

$$g(x)=\frac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)+b+c}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$$

Par identification

$$\begin{cases} a=1 \\ 2a+b=3 \\ a+2b=3 \\ b+c=5 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=4 \end{cases}$$

Donc $g(x)=x+1+\dfrac{4}{(x+1)^2}$

b) En déduire la primitive F_0 de g sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

$$g(x) = x + 1 + \frac{4}{(x+1)^2}$$

$$F_0(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x+1} + c \quad ; \; c \in \mathbb{R}$$

$$F_0(1) = 0 \iff \frac{1}{2} + 1 - \frac{4}{2} + c = 0$$

$$\iff c = \frac{1}{2}$$

D'où $F_0(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{2}$

Autrement

$$F_0(x) = \int_1^x g(t)\,dt$$

$$= \int_1^x \left(t + 1 + \frac{4}{(t+1)^2}\right) dt$$

$$= \left[\frac{t^2}{2} + t - \frac{4}{t+1}\right]_1^x$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x+1} - \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{4}{2}\right)$$

$$= \frac{x^2}{2} + x - \frac{4}{x+1} + \frac{1}{2}$$

2°) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ par : $f(x)=x\cos(2x)$ et soit **C** sa courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $f(x)\geq 0$ puis calculer l'aire de la région limitée par la courbe **C** et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

$\forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ on $x\geq 0$.

$\Rightarrow\ 2x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$\Rightarrow\ \cos(2x)\geq 0$

d'où $x.\cos(2x)\geq 0$

$\Leftrightarrow$ $f(x)\geq 0$ $\forall\ x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

$$\mathcal{A}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|f(x)|\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}x.\cos(2x)\,dx.$$

On pose

$U(x)=x\longrightarrow U'(x)=1$

$V'(x)=\cos(2x)\longrightarrow V(x)=\frac{1}{2}\sin(2x)$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}x \cdot \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x \ \sin(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left[\frac{1}{2}x \sin(2x) + \frac{1}{4}\cos(2x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(0 + \frac{1}{4}\cos(0)\right)$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$$

$$\mathcal{A} = \frac{\pi - 2}{8} \cdot cm^2$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

4ème année

Exercice

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

2°) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ alors f et g sont égales sur $[a,b]$.

3°) Pour tout x et t on a : $\int_0^1 t x^2 dt = \int_0^1 t x^2 dx$.

4°) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$.

5°) $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \sin x}{\sqrt{1+x^2}} dt = 0$.

6°) Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T} f(t)dt = 2\int_0^{T} f(t)dt$.

1°) Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

• $\int_{-1}^{3} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{3}$

$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4 \geq 0$

mais $x \leq 0$ sur $[-1,0]$

$x \geq 0$ sur $[0,3]$

faux

2°) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx$ alors f et g sont égales sur $[a,b]$.

$\bullet \int_1^2 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2$

$= 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$\bullet \int_1^2 \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot(2-1) = \frac{3}{2}$

mais $x \neq \frac{3}{2}$

faux

3°) Pour tout x et t on a : $\int_0^1 t\,x^2 dt = \int_0^1 t\,x^2 dx$.

$\int_0^1 t x^2\,dt = \int_0^1 t.x^2\,dx$??

On

$\cdot \int_0^1 t x^2\,dt = \left[x^2.\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}x^2$

$\cdot \int_0^1 t x^2\,dx = \left[t.\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}t$

D'où $\int_0^1 t x^2\,dt \neq \int_0^1 t x^2\,dx$

faux

4°) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = 2\int_{0}^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

$t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

$0 \in [-\pi, \pi]$

faux

5°) $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \sin x}{\sqrt{1+x^2}}\, dt = 0$.

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}\, dt$$

$$= \frac{x^4 \sin(x)}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \int_{-1}^{1} dt$$

$$= \frac{x^4 \cdot \sin(x)}{\sqrt{1+x^2}} \left(1-(-1)\right)$$

$$= \frac{2 \cdot x^4 \sin(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

faux

6°) Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T} f(t)dt = 2\int_0^{T} f(t)dt$.

. $\int_0^{2T} f(t)\,dt = 2.\int_0^{T} f(t)\,dt$, ??

. $\int_0^{T} f(t)\,dt = \int_T^{T+T} f(t)\,dt$

$= \int_T^{2T} f(t)\,dt$

$= \int_T^{0} f(t)\,dt + \int_0^{2T} f(t)\,dt$

. $\int_0^{T} f(t)\,dt = \int_T^{0} f(t)\,dt + \int_0^{2T} f(t)\,dt$

$\Rightarrow \int_0^{T} f(t)\,dt - \int_T^{0} f(t)\,dt = \int_0^{2T} f(t)\,dt$

$\Rightarrow \int_0^{T} f(t)\,dt + \int_0^{T} f(t)\,dt = \int_0^{2T} f(t)\,dt$

$2.\int_0^{T} f(t)\,dt = \int_0^{2T} f(t)\,dt$

Vrai

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type devoir

Exercice N°2

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

On désigne par $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Dresser le tableau de variation de f.
2. Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$
3. a) Soit g la fonction définie par $g(x)=f(x)-x$. Dresser le tableau de variation de g.
   b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite Δ d'équation $y=x$ en un seul point d'abscisse α et vérifier que : $0.7<\alpha<0.8$.
   c) Tracer $\mathscr{C}_f$.
4. a) Montrer que f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.
   b) Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}.
5. a) Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations: $y=-1$, $x=0$ et $x=\alpha$.
   Montrer que $\mathscr{A}(\alpha)=\left(2-\dfrac{1}{\alpha}\right)$ u.a.
   b) Soit $\mathscr{A}'(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x=-1$ et $y=-1$.
   Calculer $\mathscr{A}'(\alpha)$ en fonction de α.

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

1. Dresser le tableau de variation de f.

. f est dérivable sur $]-1,+\infty[$

et $\forall x\in]-1,+\infty[$

$$f'(x)=2-\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}^2}\right)$$

$$\left(\frac{1}{U}\right)'=\frac{-U'}{U^2}$$

$$(\sqrt{U})'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}$$

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$.

1 Dresser le tableau de variation de f.

donc $\forall\ x \in \,]-1,+\infty[$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}\,(x+1)}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{2\sqrt{x+1}^{\,3}} > 0$$

x	-1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} 2x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = -\infty$ (où $\sqrt{x+1} \to 0^+$)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$ (où $2x \to +\infty$; $\frac{1}{\sqrt{x+1}} \to 0$)

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x) = 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

2 Montrer que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$

⚠ Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

avec $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \varphi(x) = 0$

Alors $\Delta : y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au $V(\pm\infty)$

• $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - 2x$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$

D'où

La droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au $V(+\infty)$

Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

3 **a** Soit g la fonction définie par $g(x)=f(x)-x$.
Dresser le tableau de variation de g.

. g est dérivable sur $]-1,+\infty[$

et $\forall x \in]-1,+\infty[$

On a $g'(x) = f'(x) - 1$

$= 2 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}^3} - 1$

$= 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}^3} > 0$

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$		$(+)$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

. $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x) - x = -\infty$ (avec $f(x)\to-\infty$, $-x\to+1$)

$\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} 2x - \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} - x$

$$= \lim_{x \to +\infty} x - \frac{1}{\sqrt{x+1}} = +\infty$$

(b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ coupe la droite Δ d'équation $y = x$ en un seul point d'abscisse α et vérifier que : $0.7 < \alpha < 0.8$.

$f(x) = x \iff f(x) - x = 0$

Montrons l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

On a

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On a g continue et strictement croissante sur $]-1, +\infty[$

et $g(]-1, +\infty[) = \mathbb{R}$

et comme $0 \in \mathbb{R} = g(]-1, +\infty[)$

Donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α

$g(0,7) \simeq -0,06 < 0$

$g(0,8) \simeq 0,05 > 0$

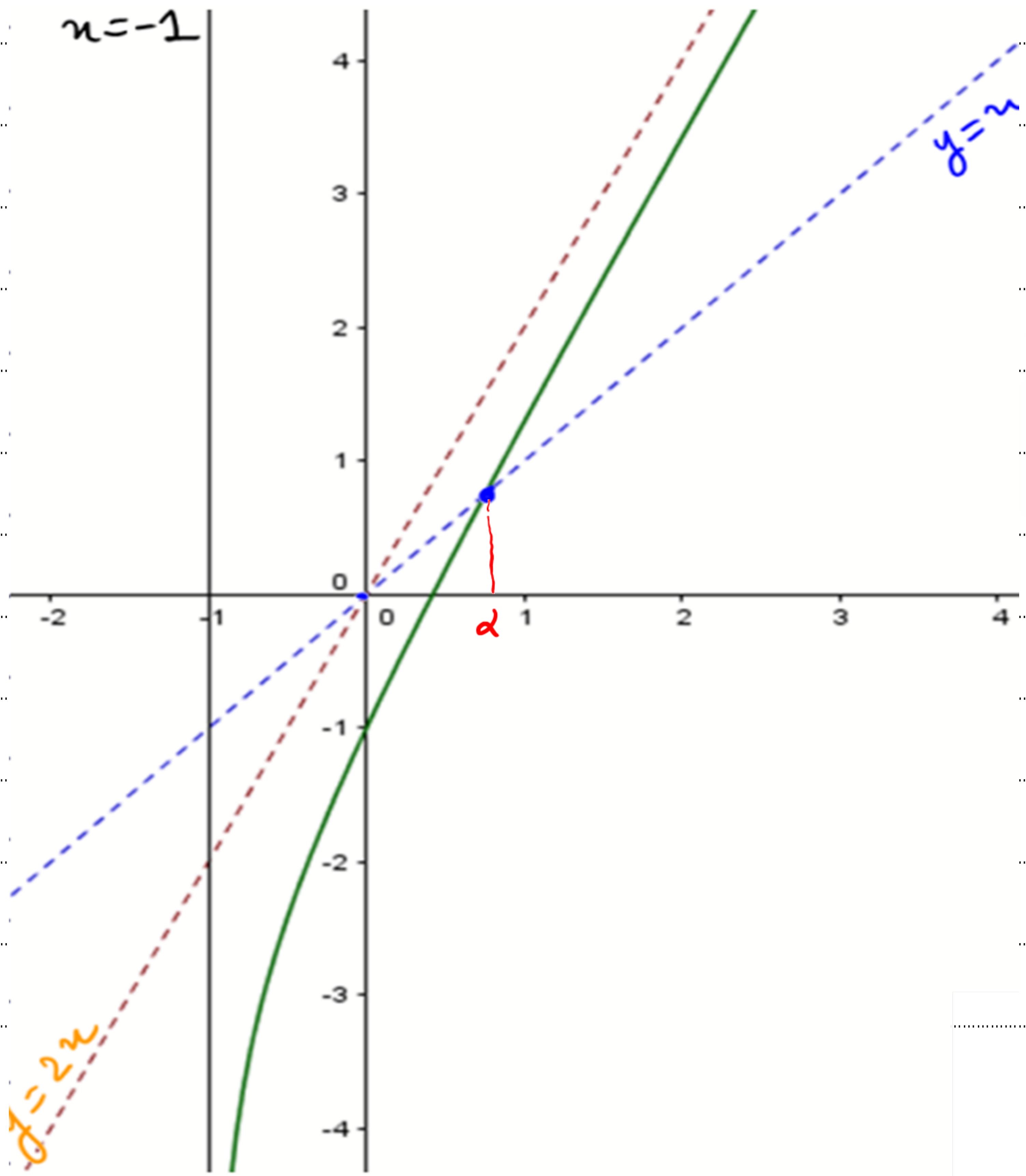
$g(0,7) \times g(0,8) < 0$

Donc $0,7 < \alpha < 0,8$

Donc

$\mathscr{C}_f$ coupe la droite $\Delta : y = x$ en un seul point α tq $0,7 < \alpha < 0,8$

c) Tracer $\mathscr{C}_f$.



4 a Montrer que f réalise une bijection de $]-1;+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

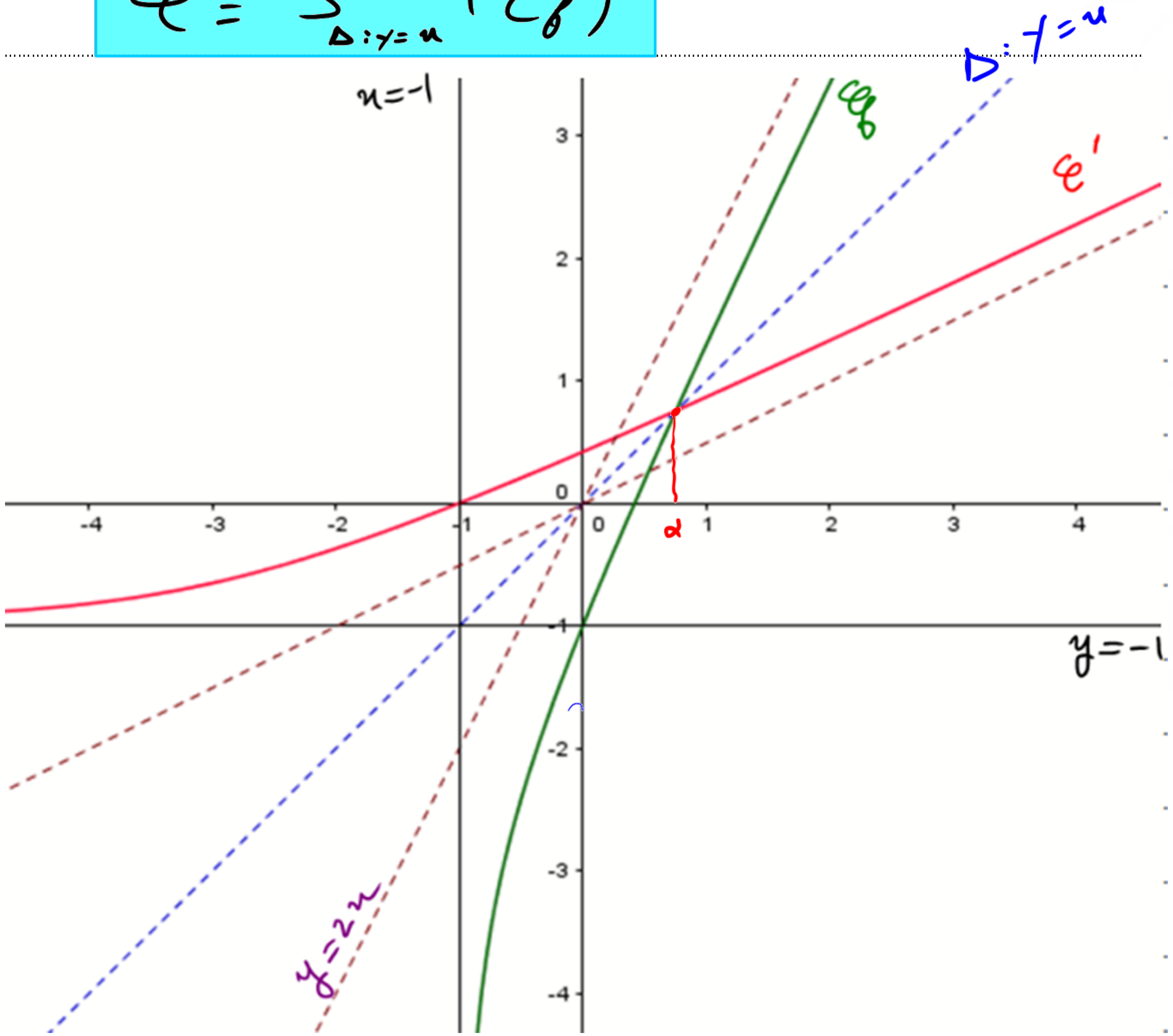
x	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

. f est continue et strictement croissante sur $]-1,+\infty[$

Donc elle réalise une bijection de $]-1,+\infty[$ sur $f(]-1,+\infty[) = \mathbb{R}$

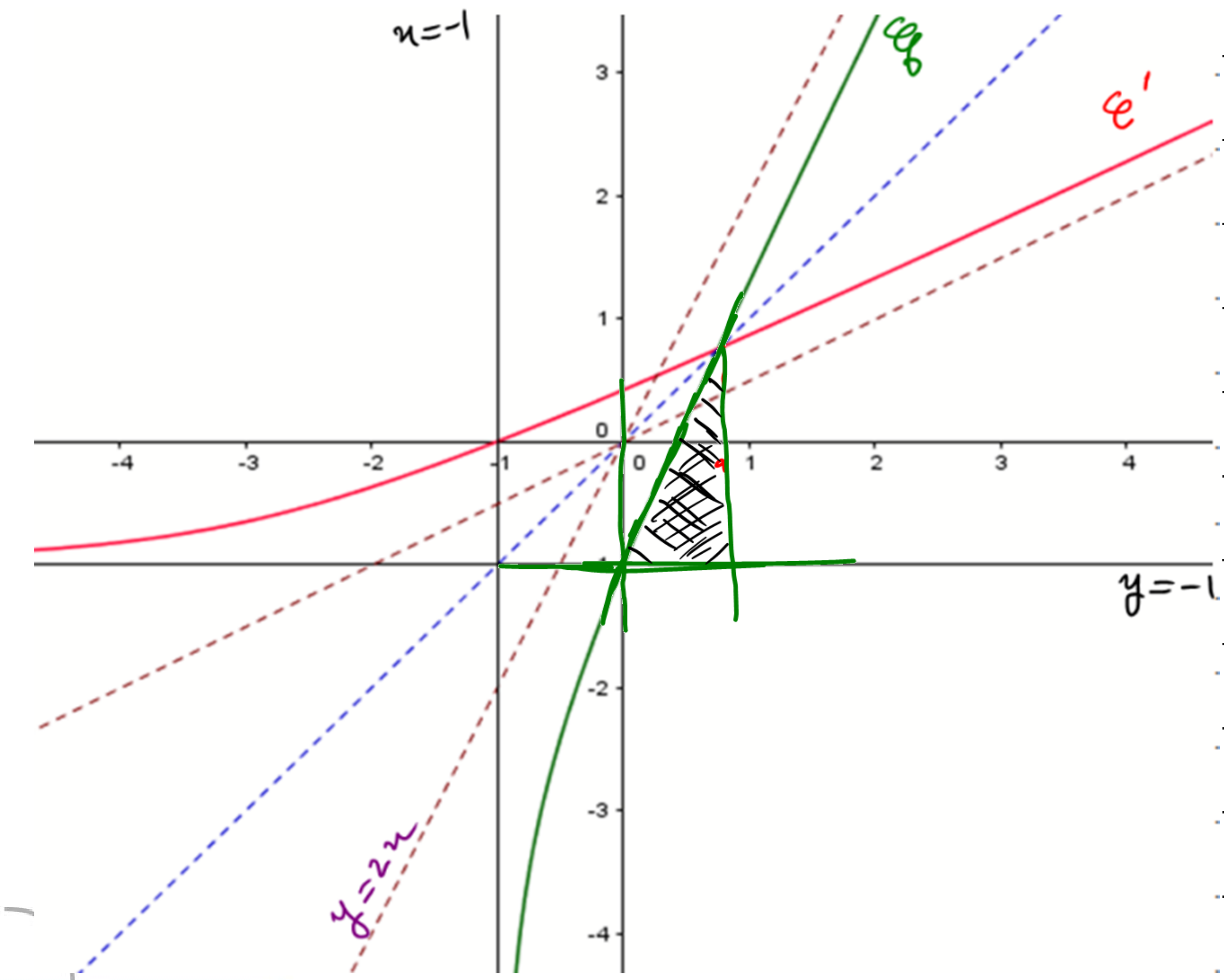
b Tracer dans le même repère la courbe $\mathscr{C}'$ de f^{-1}.

$\mathscr{C}' = S_{\Delta : y=x}(\mathscr{C}_f)$



5 **a** Soit $\mathscr{A}(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations: $y=-1$, $x=0$ et $x=\alpha$.

Montrer que $\mathscr{A}(\alpha)=\left(2-\frac{1}{\alpha}\right)$ u.a.



$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \overset{P}{\rightsquigarrow} 2\sqrt{u}$$

$$\mathscr{A}(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left|f(x)-(-1)\right|\,dx$$

$$=\int_0^{\alpha} 2x-\frac{1}{\sqrt{x+1}}+1\,dx$$

$$=\left[x^2+x-2\sqrt{x+1}\right]_0^{\alpha}$$

$$=\alpha^2+\alpha-2\sqrt{\alpha+1}+2$$

On a $f(\alpha)=\alpha$

$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}} = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\alpha+1} = \frac{1}{\alpha}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha+1 = \frac{1}{\alpha^2}$$

on

$$\mathcal{A}(\alpha) = \alpha^2 + \alpha - 2\sqrt{\alpha+1} + 2$$

$$= \alpha(\alpha+1) - 2\sqrt{\alpha+1} + 2$$

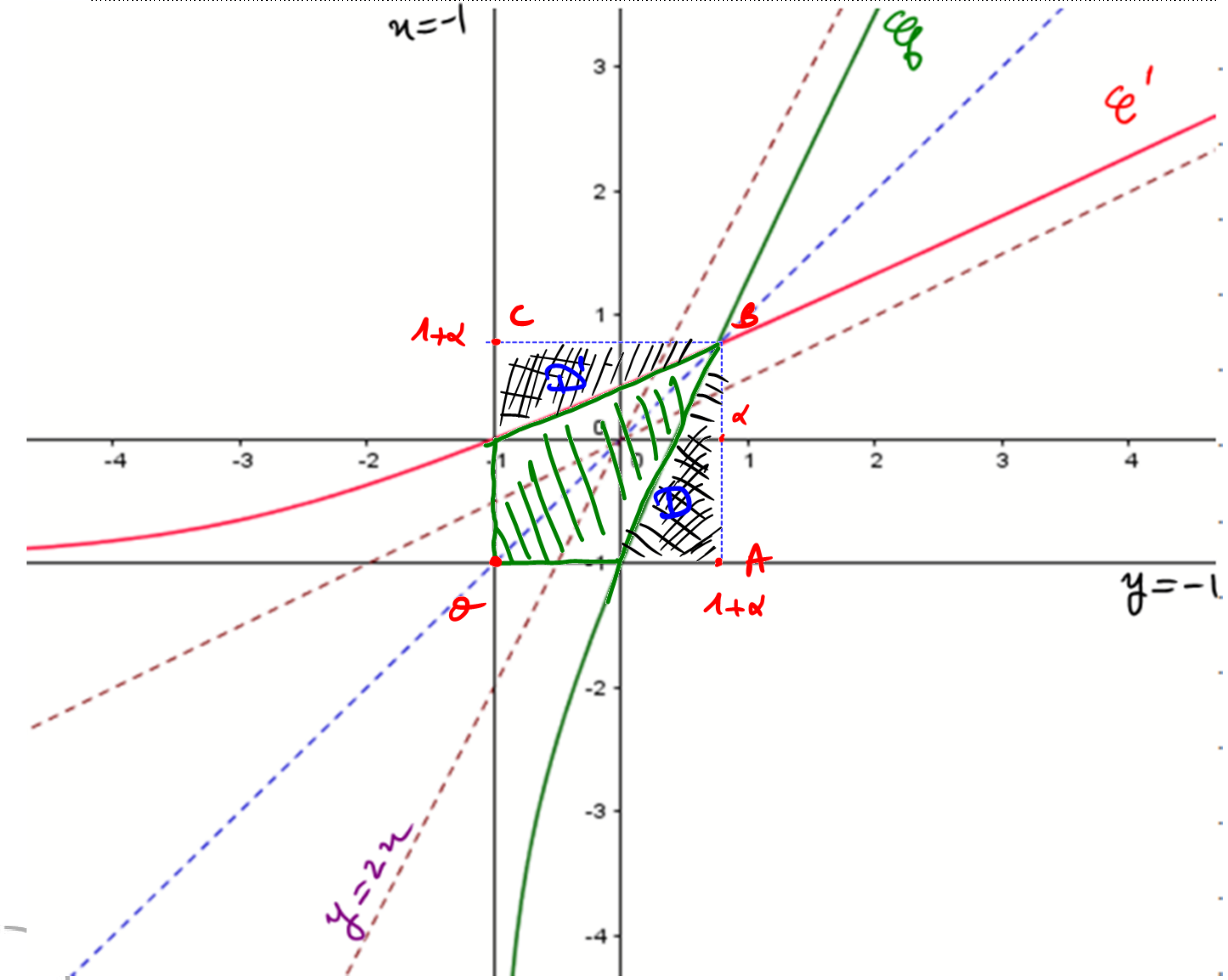
$$= \alpha \cdot \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha} + 2$$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + 2$$

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2 - \frac{1}{\alpha} \quad u.a$$

b Soit $\mathscr{A}'(\alpha)$ l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations $x = -1$ et $y = -1$.

Calculer $\mathscr{A}'(\alpha)$ en fonction de α.



soit **D** La partie du plan Limité par $\mathscr{C}_f$ et les droites d'équations

$x = 0$, $x = \alpha$ et $y = -1$

D' : La partie du plan limité par $\mathscr{C}'$ et les droites d'équations

$x = -1$; $y = \alpha$ et $y = 0$

par raison de symétrie

ou l'aire de D' est égale

à l'aire de D = $\mathcal{A}(\alpha)$

Donc

$\mathcal{A}'(\alpha)$ = aire du carré ABC – $2.\mathcal{A}(\alpha)$

$= (1+\alpha)^2 - 2\left(2 - \frac{1}{\alpha}\right)$

$= (1+\alpha)^2 - 4 + \frac{2}{\alpha}$

$\mathcal{A}'(\alpha) = (1+\alpha)^2 - 4 + \frac{2}{\alpha} \quad (u.a)$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type devoir

Taki Academy
www.takiacademy.com

Exercice N°3

1 Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan(x)$

a Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0;1]$

b Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0;1]$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$

c Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

2 Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} I_0=\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ I_n=\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2}dx \text{ pour } n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$

a Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a: $0\leq I_n\leq \frac{1}{2n+1}$

b Montrer que (I_n) est convergente

3 **a** Montrer que: $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a: $I_{n+1}+I_n=\frac{1}{2n+1}$

b Calculer alors: $J=\displaystyle\int_0^1 \frac{7x^8+7x^6-3x^4+4}{x^2+1}dx$

1 Soit la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=\tan(x)$

a Montrer que f réalise une bijection de $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0;1]$

. f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$:

$f'(x)=1+\tan^2(x) > 0$

. on a f est continue et

strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$

Donc elle réalise une bijection

de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $f\left(\left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$

$= \left[f(0), f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$= [0, 1]$

b Montrer que f^{-1} est dérivable sur $[0;1]$ et déterminer $\left(f^{-1}\right)'(x)$

f réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ sur $[0,1]$

on f est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

et $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

$f'(x) \neq 0$

Donc f^{-1} est dérivable sur $[0,1]$

Donc $\forall x \in [0,1]$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(x)\right)}$$

on $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$; $f'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$\Rightarrow \quad f'(x) = 1 + f^2(x)$

$\forall\, x \in [0, 1]$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{1 + f^2(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{1+x^2}$$

donc

$\forall\, x \in [0, 1]$; $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

c Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^1 (f^{-1})'(x)$$

$$= \left[f^{-1}(x) \right]_0^1$$

$$= f^{-1}(1) - f^{-1}(0) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}$$

2 Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par: $\begin{cases} I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \\ I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$

On $\forall\ x \in [0,1]$

$\Rightarrow\ 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow\ 1 \leq 1+x^2 \leq 2$

$\Rightarrow\ 0 < \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

par suite on $x^{2n} \geqslant 0$

$\Rightarrow\ 0 \leq \frac{x^{2n}}{1+x^2} \leq x^{2n}$

Les fonction $x \mapsto \frac{x^{2n}}{1+x^2}$ et $x \mapsto x^{2n}$ sont continues sur $[0,1]$

$\Rightarrow\ 0 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx \leq \int_0^1 x^{2n} dx$

$\Rightarrow\ 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

d'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+1}$

(b) Montrer que (I_n) est convergente

On a $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{2n+1}$

$\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2n+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

donc (I_n) est convergente

(3) (a) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a: $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{2n+1}$

$I_{n+1} + I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n+2}}{1+u^2}\,dx + \int_0^1 \frac{u^{2n}}{1+u^2}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n+2} + u^{2n}}{1+u^2}\,du$

$= \displaystyle\int_0^1 \frac{u^{2n}(u^2+1)}{1+u^2}\,dx$

$= \displaystyle\int_0^1 u^{2n}\,dx = \left[\frac{u^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$

$$= \frac{1}{2n+1}$$

D'où

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$

b Calculer alors: $J = \int_0^1 \frac{7x^8 + 7x^6 - 3x^4 + 4}{x^2+1} dx$

$$J = \int_0^1 \frac{7x^8 + 7x^6 - 3x^4 + 4}{x^2+1} dx$$

$$= 7\left(\underbrace{\int_0^1 \frac{x^8}{1+x^2} dx}_{I_4} + \underbrace{\int_0^1 \frac{x^6}{1+x^2} dx}_{I_3}\right)$$

$$- 3.\underbrace{\int_0^1 \frac{x^4}{1+x^2} dx}_{I_2} + 4.\underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx}_{J_0}$$

Or

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x^2} dx$$

$$J = 7(I_4 + I_3) - 3.I_2 + 4.I_0$$

$$= 7(I_4 + I_3) - 3(I_2 + I_1) + 3I_1 + 4I_0$$

$$J = 7(I_4 + I_3) - 3(I_2 + I_1) + 3I_1 + 4I_0$$

$$= 7(I_4 + I_3) - 3(I_2 + I_1) + 3(I_1 + I_0) + I_0$$

On $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$

$$I_4 + I_3 = \frac{1}{7}$$

$$I_2 + I_1 = \frac{1}{3}$$

$$I_1 + I_0 = 1$$

Ainsi

$$J = 7 \times \frac{1}{7} - 3 \times \frac{1}{3} + 3 \cdot 1 + \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 - 1 + 3 + \frac{\pi}{4}$$

donc $J = 3 + \frac{\pi}{4}$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type devoir

Exercice N°4

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour C.

2°) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C d'abscisse 0.

3°) Dans le graphique de la feuille annexe, on a représenté la courbe C et la droite $\Delta : y=x$.

La droite Δ coupe C en un point d'abscisse α.

a) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

b) En déduire que $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

4°) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

b) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

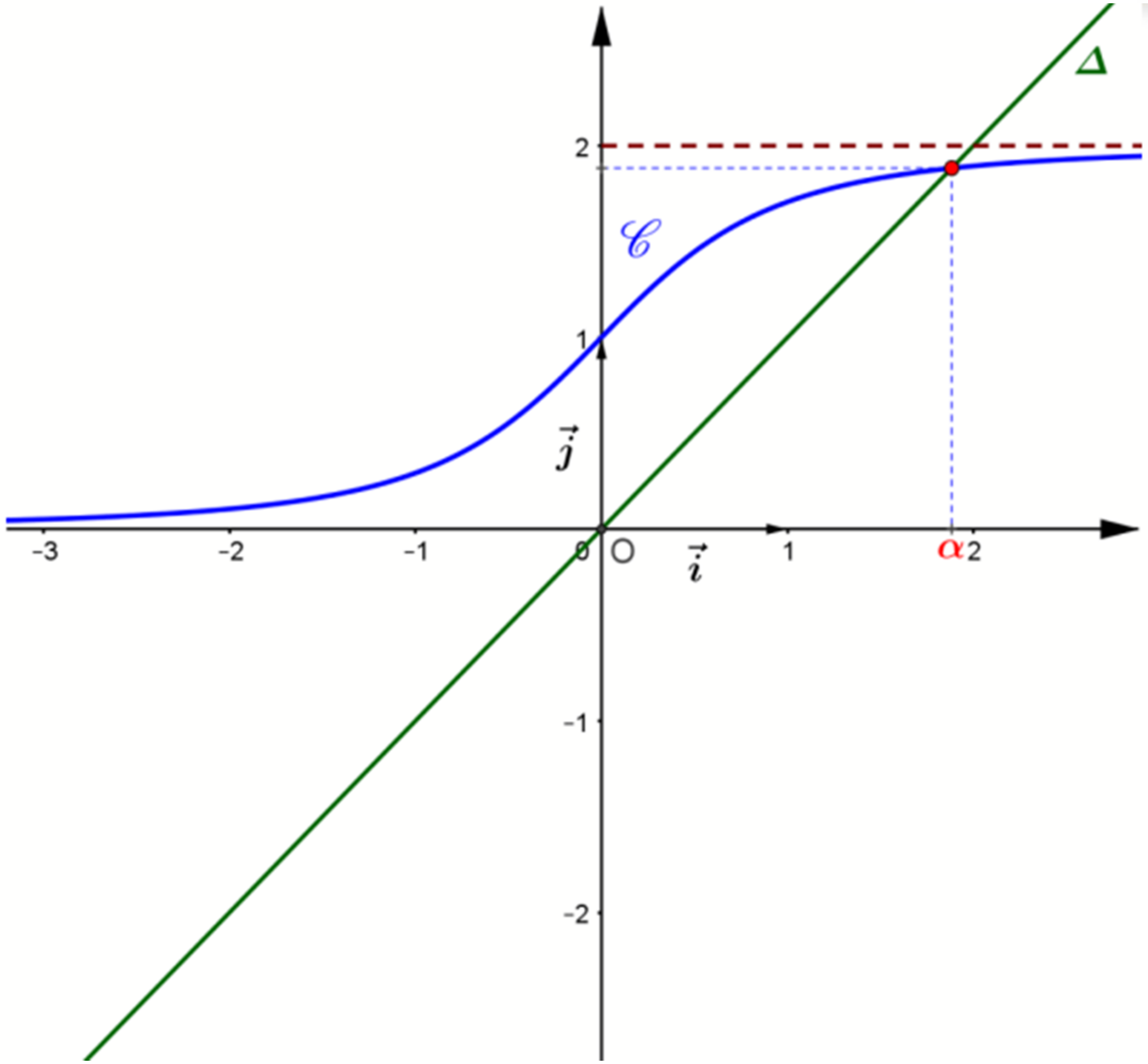
On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe C' dans le même repère.

5°) On pose $I_\alpha=\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)\,dx$.

a) Que représente graphiquement le nombre I_α ?

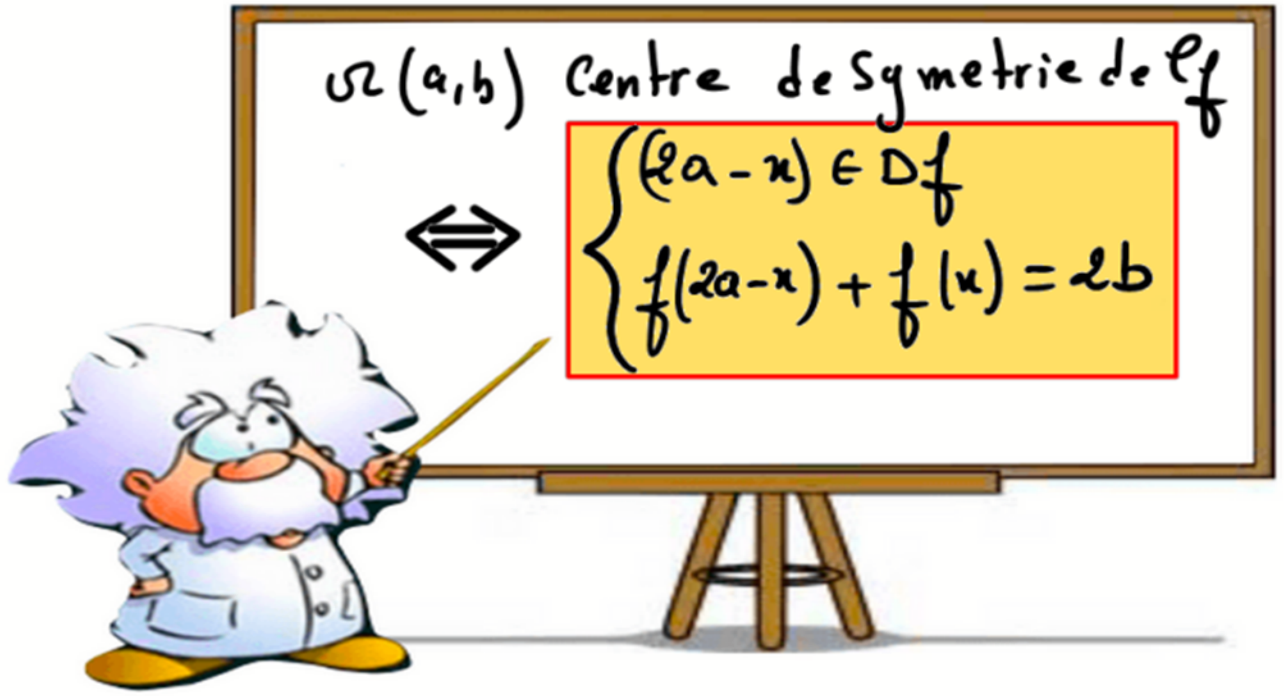
b) Calculer, I_α en fonction de α.



Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour C.



$a = 0$; $b = 1$

$\Rightarrow 2a - x = -x$

• $\forall x \in IR$ on $-x \in IR$

• $f(-x) + f(x) = 1 + \dfrac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} + 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$= 1 + \dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}} + 1 + \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$= 2 = 2 \times 1$

Ainsi

$I(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

2°) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'.v-v'u}{v^2}$$

$$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

. f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x\in\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1.\sqrt{x^2+1}-x.\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$=\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}\,(x^2+1)}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}.\sqrt{x^2+1}^2}$$

$\forall x\in\mathbb{R}$,

$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ d'abscisse 0.

$$T_0 : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$

on $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}^3}$$

$\Rightarrow$ $f(0) = 1$

$f'(0) = 1$

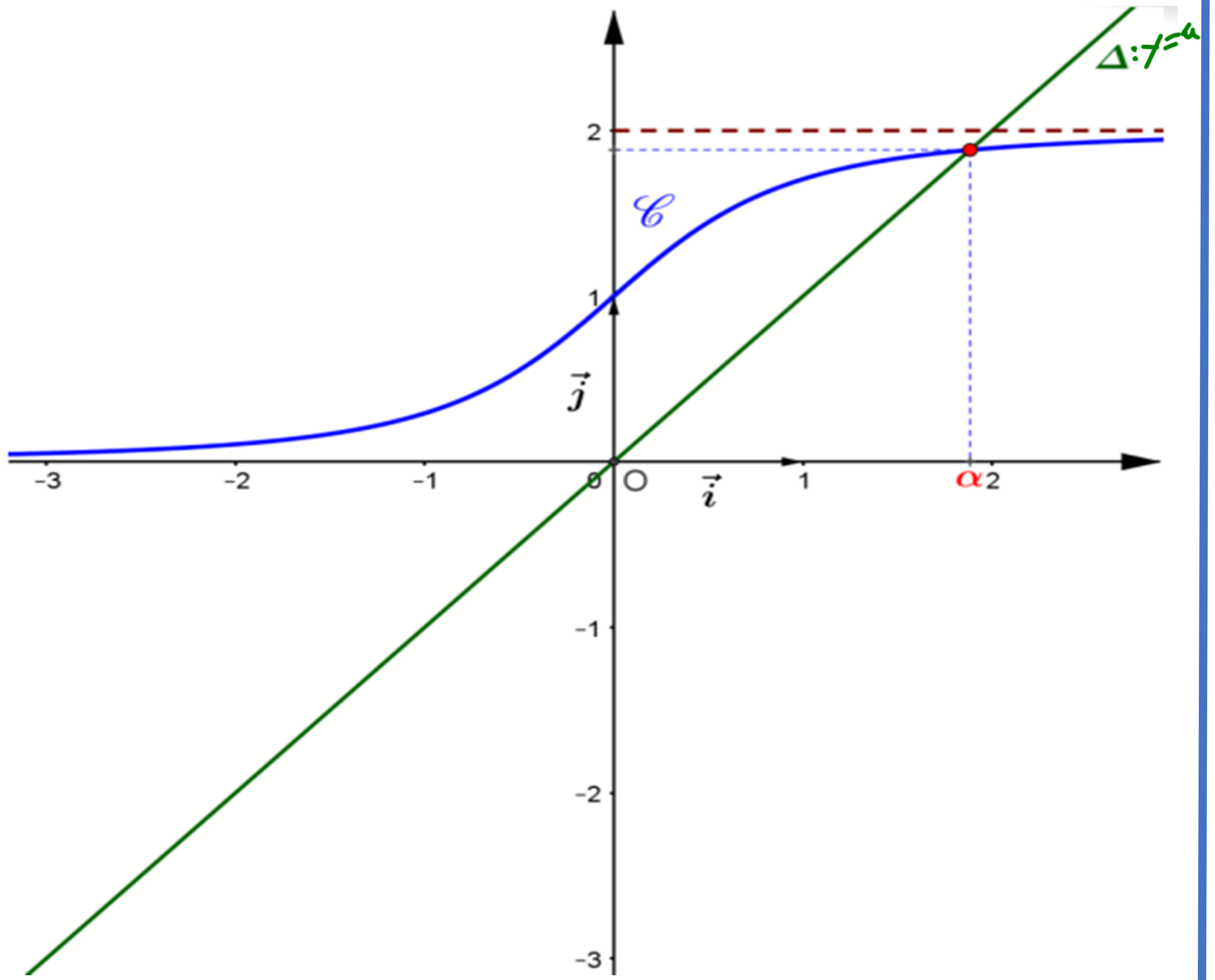
Donc

$$T_0 : y = x + 1$$

3°) Dans le graphique de la feuille annexe, on a représenté la courbe C et la droite $\Delta : y = x$.

La droite Δ coupe C en un point d'abscisse α.

a) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.



- $f(\alpha) = \alpha$

$\Leftrightarrow \quad 1 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \alpha$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \alpha - 1$

$\Leftrightarrow \quad \dfrac{\sqrt{\alpha^2+1}}{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha-1}$

$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}}$

b) En déduire que $\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \int_0^{\alpha} 1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

($2x$: u' ; $2\sqrt{x^2+1}$: $2\sqrt{u}$)

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{P} \sqrt{u}$$

$$= \left[x + \sqrt{x^2+1}\right]_0^{\alpha}$$

$$= \alpha + \sqrt{\alpha^2+1} - 1$$

$$= \alpha - 1 + \sqrt{\alpha^2+1}$$

$$= \alpha - 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)+\alpha}{\alpha-1}$$

$$= \frac{\alpha^2-2\alpha+1+\alpha}{\alpha-1}$$

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$$

4°) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

. f est dérivable sur IR et

$\forall x \in IR$, $\quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}^{\,3}} > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 + \frac{x}{-x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to -\infty} 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{x}{x \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \boxed{2}$$

On f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

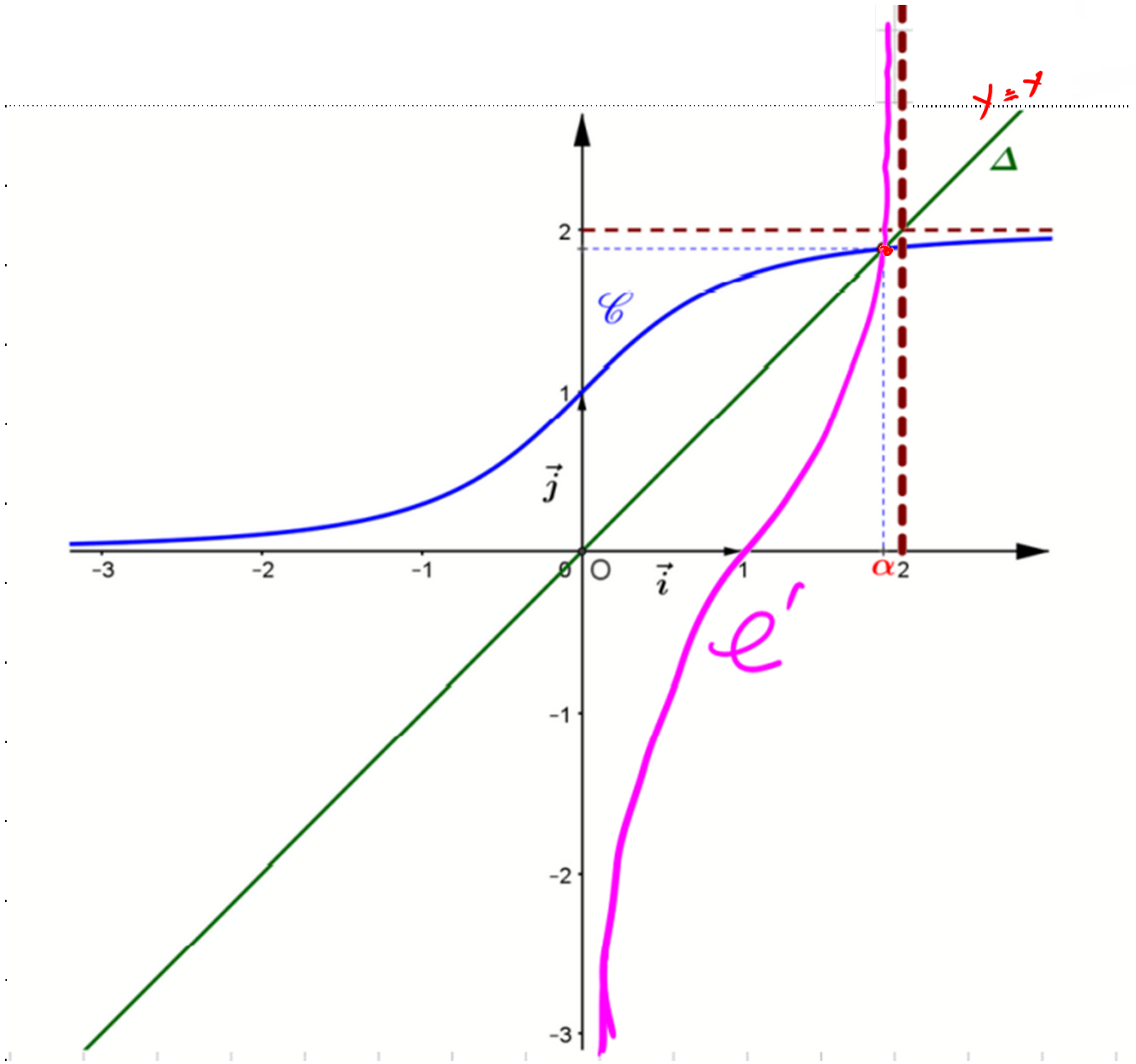
Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]0,2[= J$

b) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.

On désigne par C' la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

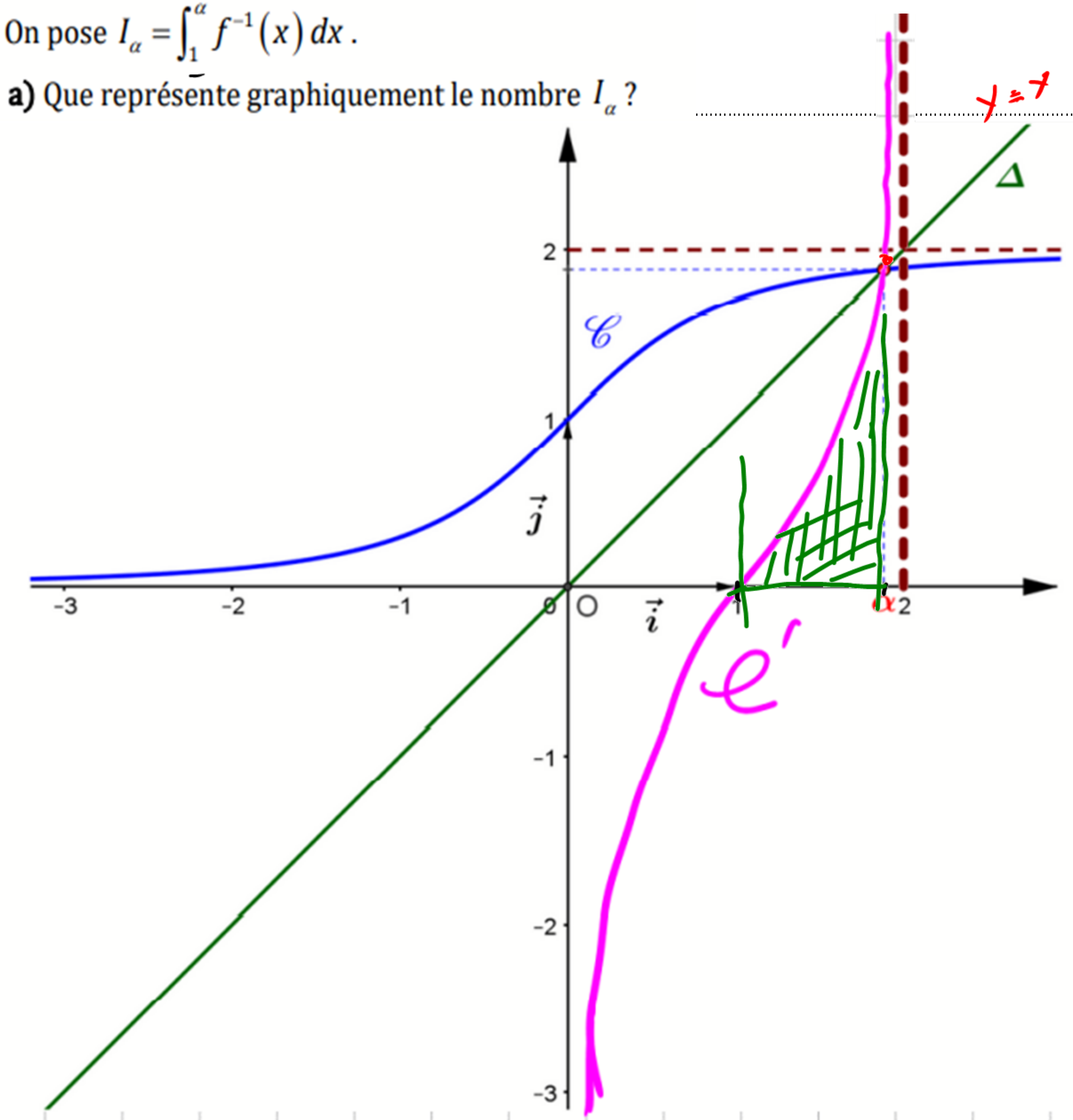
Tracer la courbe C' dans le même repère.

$$\mathscr{C}' = S_{\Delta : y=x}(\mathscr{C})$$



5°) On pose $I_\alpha = \int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx$.

a) Que représente graphiquement le nombre I_α ?

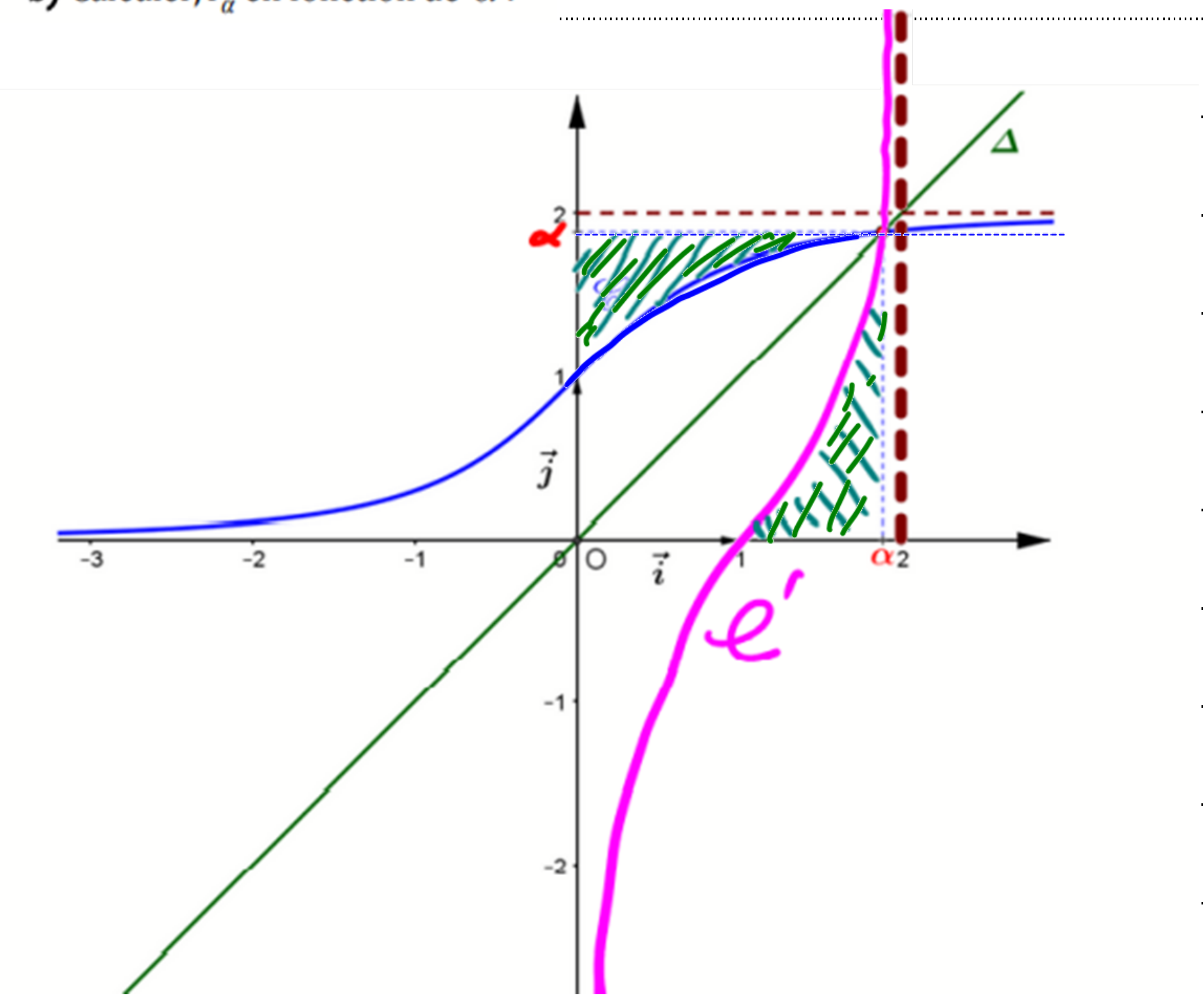


• f^{-1} est continue et positive sur $[1, \alpha]$

Donc

I_α : est l'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$

b) Calculer, I_α en fonction de α .



$$I_\alpha = \int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx$$

. Par éléments de symétrie on a

$$\int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx = \int_0^\alpha (\alpha - f(x))\,dx$$

$$= \int_0^\alpha \alpha\,dx - \int_0^\alpha f(x)\,dx$$

$$= \alpha.(\alpha - 0) - \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha - 1}$$

$$= \frac{\alpha^2(\alpha - 1) - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

$$I_\alpha = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type Devoir

Exercice N°5

Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (D) le domaine du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'aire (en unité d'aire) du domaine (D) est : $1-\frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx=\frac{1}{3}$.

3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_n\geq 0$.

b) Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n\geq 1$, $U_{n+1}+U_n=\frac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

on a f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

et $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$

on a

$f'(x)=2.(1+\tan^2(x)).\tan(x)\geq 0$

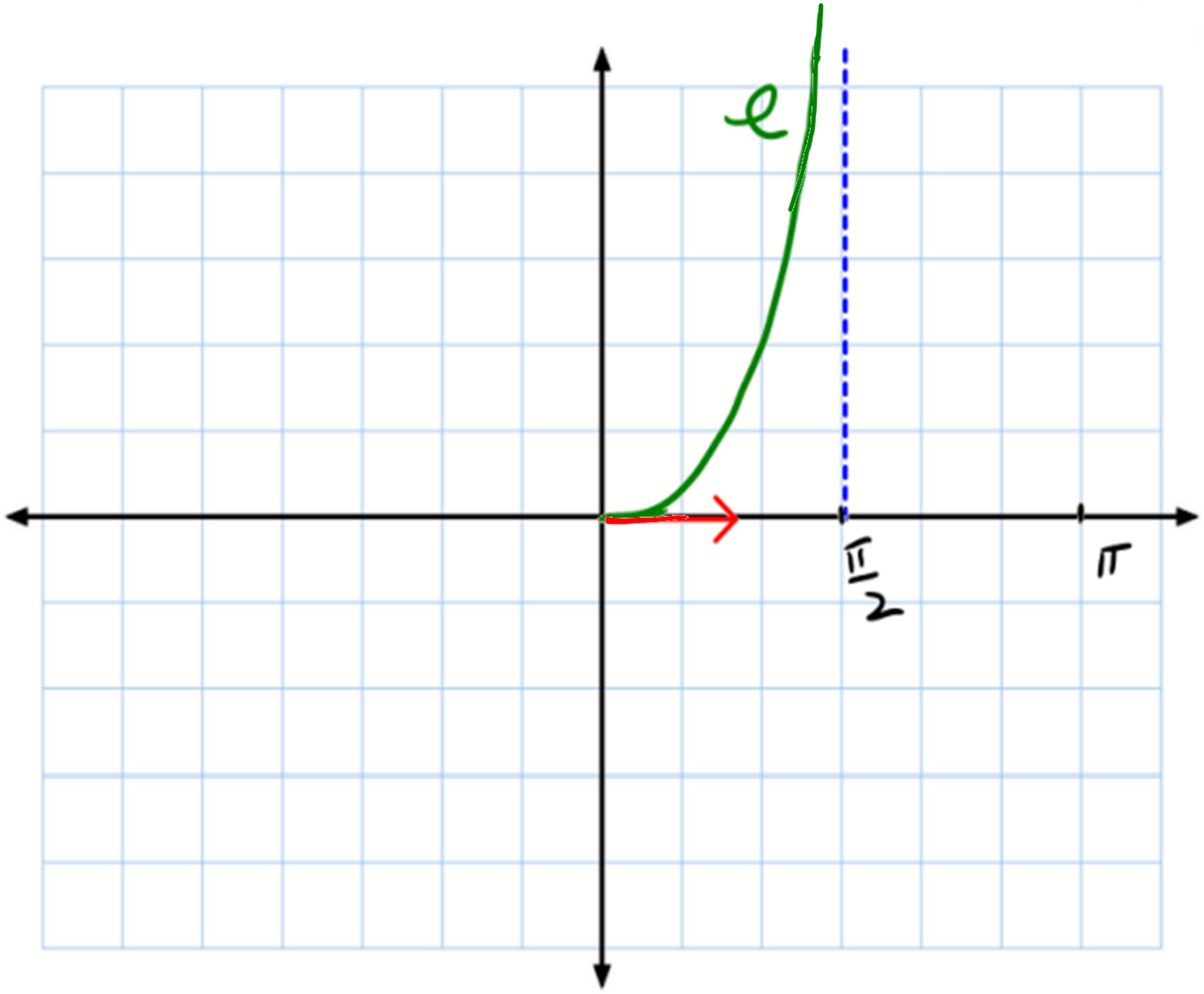
$(f^n)'=n.f'.f^{n-1}$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$$f(0) = \tan^2(0) = 0$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan^2(x) = +\infty$$

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.



2°) Soit (D) le domaine du plan limité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'aire (en unité d'aire) du domaine (D) est : $1-\frac{\pi}{4}$.

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\, dx$$

$1+\tan^2(x) \xrightarrow{P} \tan(x)$

$$\mathcal{A} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+\tan^2(x) - 1\, dx$$

$$= \left[\tan(x) - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4}\right) - \left(\tan(0) - 0\right)$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

Donc $\mathcal{A} = 1 - \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \frac{1}{3}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^2(x) + \tan^4(x)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left(1 + \tan^2(x)\right)}_{U'(x)} \cdot \underbrace{\tan^2(x)}_{U^2(x)}\,dx$$

$$U'U^n \longrightarrow \frac{U^{n+1}}{n+1}$$

$$= \left[\frac{\tan^3(x)}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan^3\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3} - 0$$

$$= \boxed{\frac{1}{3}}$$

c) En déduire le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisse.

$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\, dx$$

On $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\, dx = \frac{1}{3}$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)\, dx = \frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx$

$$V = \pi . \left(\frac{1}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi \left(1 - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi}{3} - \pi + \frac{\pi^2}{4}$$

$$V = \frac{\pi^2}{4} - \frac{2\pi}{3}$$

3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq 0$.

. f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

en particulier sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$f(x) = \tan^2(x) \geq 0$

Donc $f^n(x) = \tan^{2n}(x) \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\,dx \geq 0$$

b) Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

$\cdot\ U_{n+1} - U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n+1}(x)\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n+1}(x) - f^n(x)\,dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\,(f(x)-1)\,dx.$

$\longrightarrow f^n(x)\,(f(x)-1)$ continue

sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$\cdot\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$f^n(x) \geq 0.$

$\cdot\ \forall x \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad 0 \leq \tan(x) \leq 1$

La fonction tan est croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

Donc $0 \leq \tan^2(x) \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1$

Donc $1 - f(x) \leq 0$

Donc $f^n(x)\left(f(x)-1\right) \leq 0$

$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\left(f(x)-1\right) dx \leq 0$

par suite $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$\Rightarrow$ la suite (U_n) est décroissante

(U_n) est décroissante et minorée par 0, Donc elle est convergente

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

$$U_{n+1} + U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n+1}(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n}(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(f^{n+1}(x) + f^{n}(x) \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^{n}(x) \left(f(x) + 1 \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \underbrace{\left(1 + \tan^2(x)\right)}_{u'} \cdot \underbrace{\tan^{2n}(x)}_{u^{2n}}\,dx$$

$$= \left[\frac{\tan^{2n+1}(x)}{2n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\tan^{2n+1}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2n+1} - 0$$

$$= \frac{1}{2n+1}$$

$\forall\, n \geq 1$

$$U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$$

On $U_{n+1} + U_n = \frac{1}{2n+1}$

On pose $\lim_{n \to +\infty} U_n = l$

Donc $\lim_{n \to +\infty} U_{n+1} = l$

par suite

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

$l + l = 0$

$\Rightarrow 2l = 0$

$\Rightarrow l = 0$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type Devoir

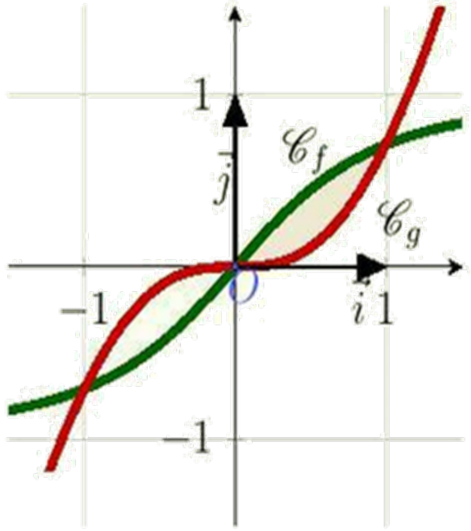
Exercice N°8

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1. Calculer I_0.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.
3. a. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$.

   b. En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+3} - \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right) I_n$.

   c. Calculer I_1.
4. Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.
On a représenté ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en (u.a) de la partie du plan limitée les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.



1. Calculer I_0.

$$I_0 = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$\frac{u'}{2\sqrt{u}} \longrightarrow \sqrt{u}$$

$$I_0 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

Donc $I_0 = \sqrt{2} - 1$

Soit (I_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

2 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{2n+2}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

$\forall u \in [0,1]$

$$\frac{u^{2n+1}}{\sqrt{u^2+1}} \geqslant 0$$

$u \longmapsto \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{u^2+1}}$ est continue sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{u^2+1}}\,du \geqslant 0$$

D'où $I_n \geqslant 0$

par suite

$$1+u^2 \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+u^2} \geqslant 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant 1$$

on $\forall x \in [0,1]$, $u^{2n+1} \geqslant 0$

$$\Rightarrow \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leqslant u^{2n+1}$$

. les fonction $u \longmapsto \frac{u^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}$

et $u \longmapsto u^{2n+1}$

sont continue sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx \leq \int_0^1 x^{2n+1}\,dx$

$\Rightarrow \quad I_n \leq \left[\frac{x^{2n+2}}{2n+2}\right]_0^1$

$$I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

Ainsi

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

On $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+2} = 0$

$0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2} \searrow 0$

Donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$$

3 (a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx.$

$$I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{2n+2} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$$

On pose

$$U(x) = x^{2n+2} \longrightarrow U'(x) = (2n+2)\,x^{2n+1}$$

$$v'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \longrightarrow v(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$I_{n+1} = \left[x^{2n+2}\cdot\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 - (2n+2)\cdot\int_0^1 x^{2n+1}\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$$= \sqrt{2} - (2n+2)\cdot\int_0^1 x^{2n+1}\cdot\sqrt{x^2+1}\,dx$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\cdot\int_0^1 x^{2n+1}\sqrt{x^2+1}\,dx$$

(b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+3} - \left(\frac{2n+2}{2n+3}\right) I_n$.

On

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2) \cdot \int_0^1 x^{2n+1} \cdot \sqrt{x^2+1}\, dx$$

$$= \sqrt{2} - (2n+2) \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n+1} \cdot (x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} - (2n+2) \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} - (2n+2) \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}}\, dx - (2n+2) \cdot \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\, I_{n+1} - (2n+2)\, I_n$$

$$I_{n+1} + (2n+2)\, I_{n+1} = \sqrt{2} - (2n+2)\, I_n$$

$$I_{n+1}\,(2n+3) = \sqrt{2} - (2n+2)\, I_n$$

$$\Rightarrow \quad I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+3} - \frac{2n+2}{2n+3}\, I_n$$

ⓒ Calculer I_1.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

$$I_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2n+3} - \frac{2n+2}{2n+3} \cdot I_n$$

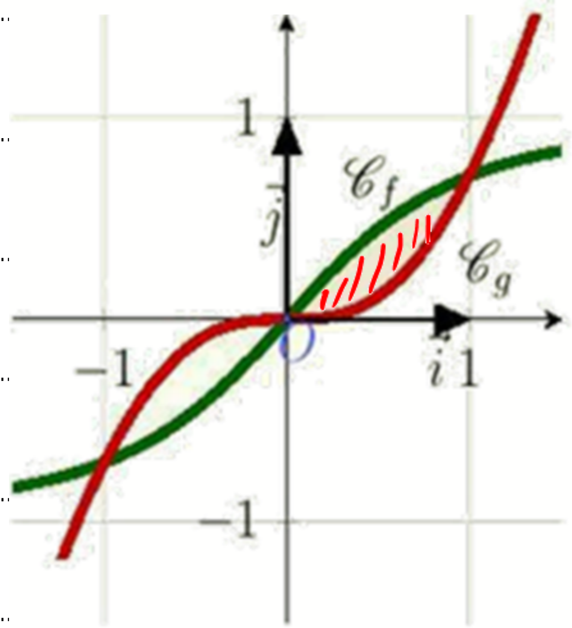
pour $n = 0$

$$\Rightarrow \quad I_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} \cdot I_0$$

$$= \frac{\sqrt{2} - 2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

$$I_1 = \frac{2-\sqrt{2}}{3}$$

④ Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}$.
On a représenté ci-contre les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Calculer l'aire $\mathscr{A}$ en $(u.a)$ de la partie du plan limitée les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.



$$\mathscr{A} = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx$$

Or sur $[0,1]$

$\mathscr{C}_f$ au dessus de $\mathscr{C}_g$

$$\Rightarrow \quad f(x) - g(x) \geq 0$$

$$\mathscr{A} = \int_0^1 f(x) - g(x)\, dx$$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\, dx - \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}}\, dx$$

$$\mathcal{A} = I_0 - I_1 \quad (u.a)$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type devoir

Exercice N°6

1-/ Soit la fonction **f** définie sur $[0,1[$ par **f (x) =** $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe

représentative de un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$

a-) Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?

b-) Dresser le tableau de variation de **f**.

c-) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$

d-) Montrer que pour **x** de $[0,+\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e-) Tracer ($\mathscr{C}$) et ($\mathscr{C}$') courbe de la fonction f^{-1} dans le même repère$(O,\vec{i},\vec{j})$.

2-/Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathscr{C}$) et les droites d'équations respectives :

x=0 et **y=1**. Montrer que $A=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx$.

3-/On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur IN par $u_n=\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

a-) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

b-) Prouver que la suite est convergente.

c-)Montrer que pour tout **n** de IN ,$0\leq u_n\leq \frac{1}{2n+1}$, puis déduire la limite de la suite.

4-/ On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur IN par $v_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2k+1} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\dots\dots\dots+\frac{(-1)^k}{2k+1}$

a-)Montrer que $1-t^2+t^4+\dots\dots\dots+(-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}= (-1)^n\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

b-)En intégrant l'égalité précédente montrer que $\forall n$ de IN; $v_n - I = (-1)^n u_n$ où $I=\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt$

c-)Montrer que $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire la laimite de la suite $(v_n)_n$

d-)Calculer v_3 puis donner une valeur approchée de I

....

....

....

....

....

....

....

....

1-/ Soit la fonction **f** définie sur $[\,0\,,1\,[$ par $f(x)=\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ et soit $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative de un repère orthonormé$(O,\vec{i},\vec{j})$

a-) Etudier la dérivabilité de **f** à droite en **0** .Interprétation géométrique ?

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{\frac{x}{1-x}}-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x\cdot\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}}=+\infty$$

($\sqrt{x}\cdot\sqrt{1-x}\to 0^+$)

$\Rightarrow$ f n'est pas dérivable à droite en 0

$\mathscr{C}_f$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite au point $O(0,0)$

1-/ Soit la fonction f définie sur [0 , 1 [par $f(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

b-) Dresser le tableau de variation de f.

On a

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$\frac{x}{1-x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	

. $x \longmapsto \frac{x}{1-x}$ dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

en particulier sur $]0,1[$

et $\forall x \in]0,1[$, $\frac{x}{1-x} > 0$

Donc f est dérivable sur $]0,1[$

et $\forall x \in]0,1[$

$f'(x) =$

$$(\sqrt{f})' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$$

$\forall x \in \,]0,1[$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{1.(1-x) - (-1).x}{(1-x)^2}}{2.\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$$

$$= \frac{1 - x + x}{2(1-x)^2 . \sqrt{\dfrac{x}{1-x}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2(1-x^2)\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}} > 0$$

x	0		1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{\frac{x}{1-x}} = +\infty$$

c-) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle $[0,+\infty[$

x	0		1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

. On a f est continue et strictement croissante sur $[0,1[$

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $f([0,1[) = [0,+\infty[$

d-) Montrer que pour **x** de $[0,+\infty[$; $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

$f : [0,1[\longrightarrow [0,+\infty[$ est bijective

soit

$\begin{cases} y \in [0,1[\\ \text{tq } f(y) = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0,+\infty[\\ f^{-1}(x) = y \end{cases}$

on $f(y) = x$

$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{y}{1-y}} = x$

$\Rightarrow \frac{y}{1-y} = x^2$

$\Rightarrow y = x^2(1-y)$

$\Rightarrow y = x^2 - x^2 . y$

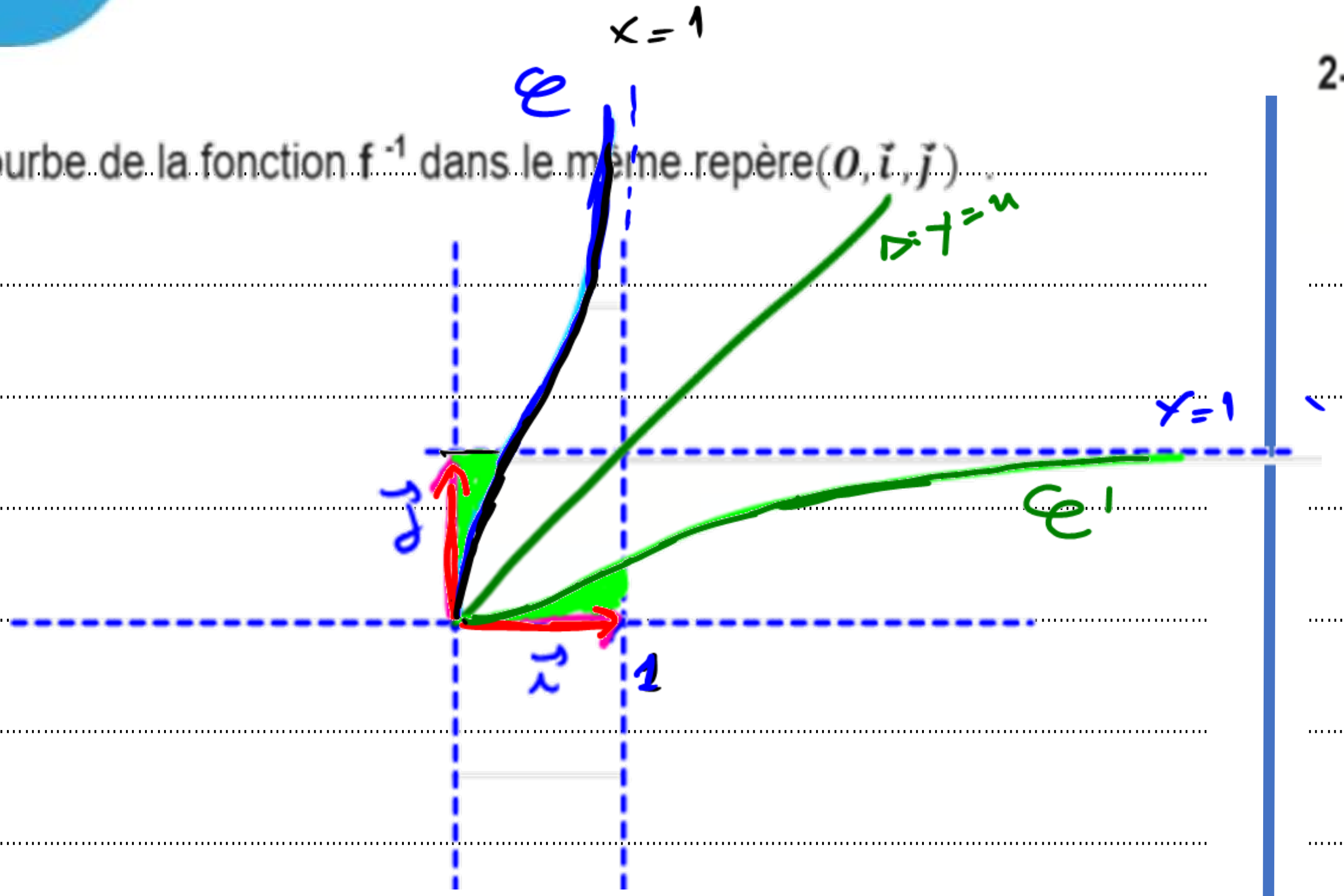
$\Rightarrow y + x^2 y = x^2$

$\Rightarrow y(1+x^2) = x^2$

d'où $y = \frac{x^2}{1+x^2}$

$\forall x \in [0,+\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

e-) Tracer ($\mathcal{C}$) et ($\mathcal{C}'$) courbe de la fonction f^{-1} dans le même repère$(O,\vec{i},\vec{j})$.



$$\mathcal{C}' = S_{\Delta : y=x}(\mathcal{C}_f)$$

2-/Soit **A** l'aire du domaine limité par la courbe ($\mathcal{C}$) et les droites d'équations respectives : **x=0** et **y=1**. Montrer que **A**$=\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$.

Par raison de symétrie

$\mathcal{A}$ = l'aire du domaine

limité par $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}_f$

droites d'équations $x=1$ et $y=0$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f^{-1}(x) - 0|\,dx = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$$

Donc

$$\forall t = \int_0^1 \frac{u^2}{1+u^2}\,du$$

3-/On considère la suite $(u_n)_n$ définie sur IN par $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$.

a-) Montrer que la suite $(u_n)_n$ est décroissante.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n+4}}{1+t^2} - \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\left(t^2-1\right)dt$$

$\forall\ 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 1$

Donc $t^2 - 1 \leq 0$

et par suite $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geq 0$

Donc $\dfrac{t^{2n+2}}{1+t^2}(t^2-1) \leq 0$

$$t \mapsto \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}(t^2-1)$$

est continue sur $[0,1]$

Donc

$$\int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}(t^2-1)\,dt \leq 0$$

donc $U_{n+1} - U_n \leq 0$

$\Rightarrow$ (U_n) est décroissante

b-) Prouver que la suite est convergente.

on $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$

$t \mapsto \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ est continue sur $[0,1]$

$\forall t \in [0,1]$, $\frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \geq 0$

donc $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \geq 0$

donc U_n minorée par 0

On a (U_n) est décroissante

et minorée par 0

Donc (U_n) est convergente

c-)Montrer que pour tout n de IN ,$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2n+1}$, puis déduire la limite de la suite.

On a $U_n \geq 0$

On a $U_n = \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \, dt$

On a $t^2 \leq 1 + t^2$

$\Rightarrow \frac{t^2}{1+t^2} \leq 1 \quad \forall t \in [0,1]$

$\Rightarrow \frac{t^2}{1+t^2} \cdot t^{2n} \leq t^{2n}$.

$\Rightarrow \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} \leq t^{2n}$

les fonctions $t \longmapsto \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$ et $t \longmapsto t^{2n}$

sont continues sur $[0,1]$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt \leq \int_0^1 t^{2n}\,dt$$

$$\Rightarrow \quad U_n \leq \left[\frac{t^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

$$U_n \leq \frac{1}{2n+1} - 0$$

d'où

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{2n+1} \to 0$$

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 0$$

4-/ On considère la suite $(v_n)_n$ définie sur IN par $v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots\dots\dots + \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a-)Montrer que $1 - t^2 + t^4 + \dots\dots\dots + (-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n \frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$.

$$1 - t^2 + t^4 + \dots + (-1)^n . t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k . t^{2k} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (t^2)^k - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= (-t^2)^0 . \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1-(-t^2)} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{1+t^2} - \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= -\frac{(-1)^{n+1} . (t^2)^{n+1}}{1+t^2}$$

$$(-1)^{n+1} = (-1)^n . (-1)$$

$4^{\text{ème}}$ année

$$= -\frac{(-1).(-1)^n.t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$= \frac{(-1)^n.t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$$1-t^2+t^4+\cdots+(-1)^n t^{2n} - \frac{1}{1+t^2}$$

$$= (-1)^n.\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$$

$v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

b-)En intégrant l'égalité précédente montrer que $\forall n$ de IN; $v_n - I = (-1)^n u_n$. où $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$

On $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^{2k} - \frac{1}{1+t^2} = (-1)^n.\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.t^{2k}\,dt - \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$= \int_0^1 (-1)^n.\frac{t^{2n+2}}{1+t^2}\,dt$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.\int_0^1 t^{2k}\,dt - I = (-1)^n.U_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \int_0^1 t^{2k}\,dt - I = (-1)^n \cdot U_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \left[\frac{t^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 - I = (-1)^n \cdot U_n$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} - I = (-1)^n U_n$$

$$\Rightarrow v_n - I = (-1)^n \cdot U_n$$

c-)Montrer que $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$ puis déduire la laimite de la suite $(v_n)_n$

On $v_n - I = (-1)^n U_n$

$$\Rightarrow |v_n - I| = |(-1)^n U_n|$$

$$= |U_n| = U_n \leq \frac{1}{2n+1}$$

donc $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - I = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = I$

d-) Calculer v_3 puis donner une valeur approchée de **I**

$$v_3 = \sum_{k=0}^{3} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$$

$$= \frac{76}{105}$$

on $|v_n - I| \leq \frac{1}{2n+1}$

pour $n = 3$

$$|v_3 - I| \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7} \leq v_3 - I \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7} \leq I - v_3 \leq \frac{1}{7}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{7} + v_3 \leq I \leq \frac{1}{7} + v_3$$

$$-\frac{1}{7} + \frac{76}{105} \leq I \leq \frac{1}{7} + \frac{76}{105}$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Type Devoir

Exercice N°7

Soit f la fonction définie sur]-1/2 , +∞[par $f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Etudier la position de ζ_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

3) Tracer Δ et ζ_f.

4) Soit $I = \int_0^1 \dfrac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

. **a)** Donner une interprétation graphique de I.

b) Calculer I.

5) a) Montrer que f réalise une bijection de]-1/2 , +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f.

c) Déterminer l'aire de la partie limitée par ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

1) Dresser le tableau de variation de f.

$x \mapsto x-1$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$x \mapsto 2x+1$ est dérivable et strictement positive sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

$x \mapsto f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$ est dérivable

sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$

Soit f la fonction définie sur]-1/2 , +∞[par $f(x) = 1 + \dfrac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$$

$$\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$$

Donc $\forall\, x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$$f'(x) = \frac{1 \times \sqrt{2x+1} - \dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}} \times (x-1)}{2x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2x+1} - \dfrac{(x-1)}{\sqrt{2x+1}}}{2x+1}$$

$$= \frac{\sqrt{2x+1}.\sqrt{2x+1} - (x-1)}{(2x+1).\sqrt{2x+1}}$$

$$f'(x) = \frac{2x+1 - x+1}{\sqrt{2x+1}^{\,3}}$$

$$f'(x) = \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}^{\,3}} > 0$$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0			$+$	

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x-1}{(2x+1)} \cdot \sqrt{2x+1} = +\infty$$

$\frac{x-1}{2x+1} \to \frac{1}{2}$; $\sqrt{2x+1} \to +\infty$

$$\cdot \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} = -\infty$$

$x-1 \to -\frac{3}{2}$; $\sqrt{2x+1} \to 0^+$

Soit f la fonction définie sur $]-1/2\,,+\infty[$ par $f(x) = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}}$.

2) Etudier la position de ζ_f par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

$$\cdot f(x) - y = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} - x$$

$$= \frac{x-1}{\sqrt{2x+1}} - x + 1$$

$$= (x-1)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2x+1}} - 1\right)$$

$$= (x-1)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{2x+1}}{\sqrt{2x+1}}\right)$$

$$= (x-1)\cdot\frac{\left(1-\sqrt{2x+1}\right)\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}{\sqrt{2x+1}\cdot\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$= (x-1)\cdot\frac{1-(2x+1)}{\sqrt{2x+1}\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}$$

$$f(x)-y = \frac{-2x\cdot(x-1)}{\underbrace{\sqrt{2x+1}\cdot\left(1+\sqrt{2x+1}\right)}_{>0}}$$

x	$-\frac{1}{2}$		0		1		$+\infty$
$-2x$		$+$	0	$-$		$-$	
$(x-1)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	0	$-$	
position		$\mathcal{C}_f$ est au dessous de Δ	$\mathcal{C}_f \cap \Delta = \{(0,0)\}$	$\mathcal{C}_f$ est au dessus de Δ	$\mathcal{C}_f \cap \Delta = \{(1,1)\}$	$\mathcal{C}_f$ est au dessous de Δ	

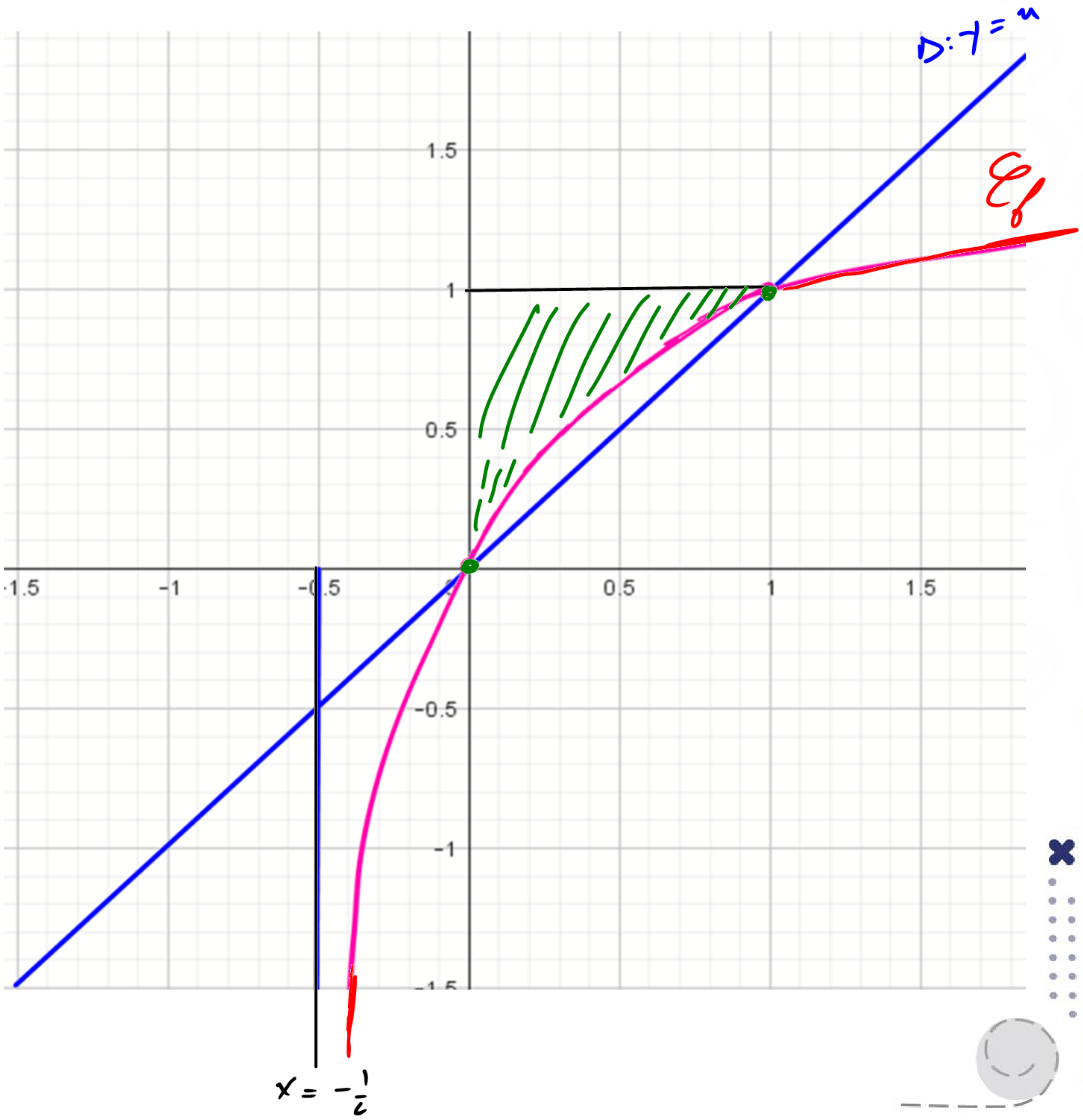
3) Tracer Δ et ζ_f .

x	$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		$-\infty \nearrow +\infty$	

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\dfrac{1}{x}}_{0} + \underbrace{\dfrac{x-1}{x}}_{1} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}}_{0}$

$= 0$

Cf admet une Branche parabolique de direction $(O\vec{i})$ au voisinage de $+\infty$



4) Soit $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

. **a)** Donner une interprétation graphique de I.

$$I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

$$= \int_0^1 1 - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 |1 - f(x)|\,dx$$

Car C_f est au dessous de $\Delta : y = 1$

$$I = \int_0^1 |1 - f(x)|\,dx$$

c'est l'aire de la partie du plan limitée par C_f, les droites d'équation $y = 1$ et $x = 0$ et $x = 1$

4) Soit $I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$.

b) Calculer I.

$$I = \int_0^1 \frac{1-x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

on pose

$u(x) = 1-x \longrightarrow u'(x) = -1$

$v'(x) = \frac{2\cdot 1}{2\sqrt{2x+1}} \longrightarrow v(x) = \sqrt{2x+1}$

$$I = \left[(1-x)\cdot\sqrt{2x+1}\right]_0^1 + \int_0^1 \sqrt{2x+1}\,dx$$

$$= 0 - 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 2\cdot\sqrt{2x+1}\,dx$$

$u'\cdot\sqrt{u} \xrightarrow{P} \frac{2}{3}\cdot u\sqrt{u}$

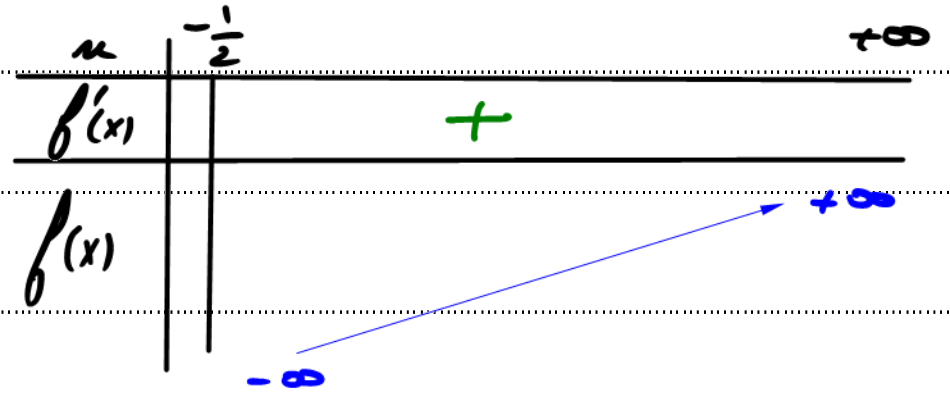
$$= -1 + \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+1)\cdot\sqrt{2x+1}\right]_0^1$$

$$= -1 + \left[\frac{1}{3}(2x+1)\left(\sqrt{2x+1}\right)\right]_0^1$$

$$= -1 + \sqrt{3} - \frac{1}{3}$$

$$= \sqrt{3} - \frac{4}{3} \simeq 0,4$$

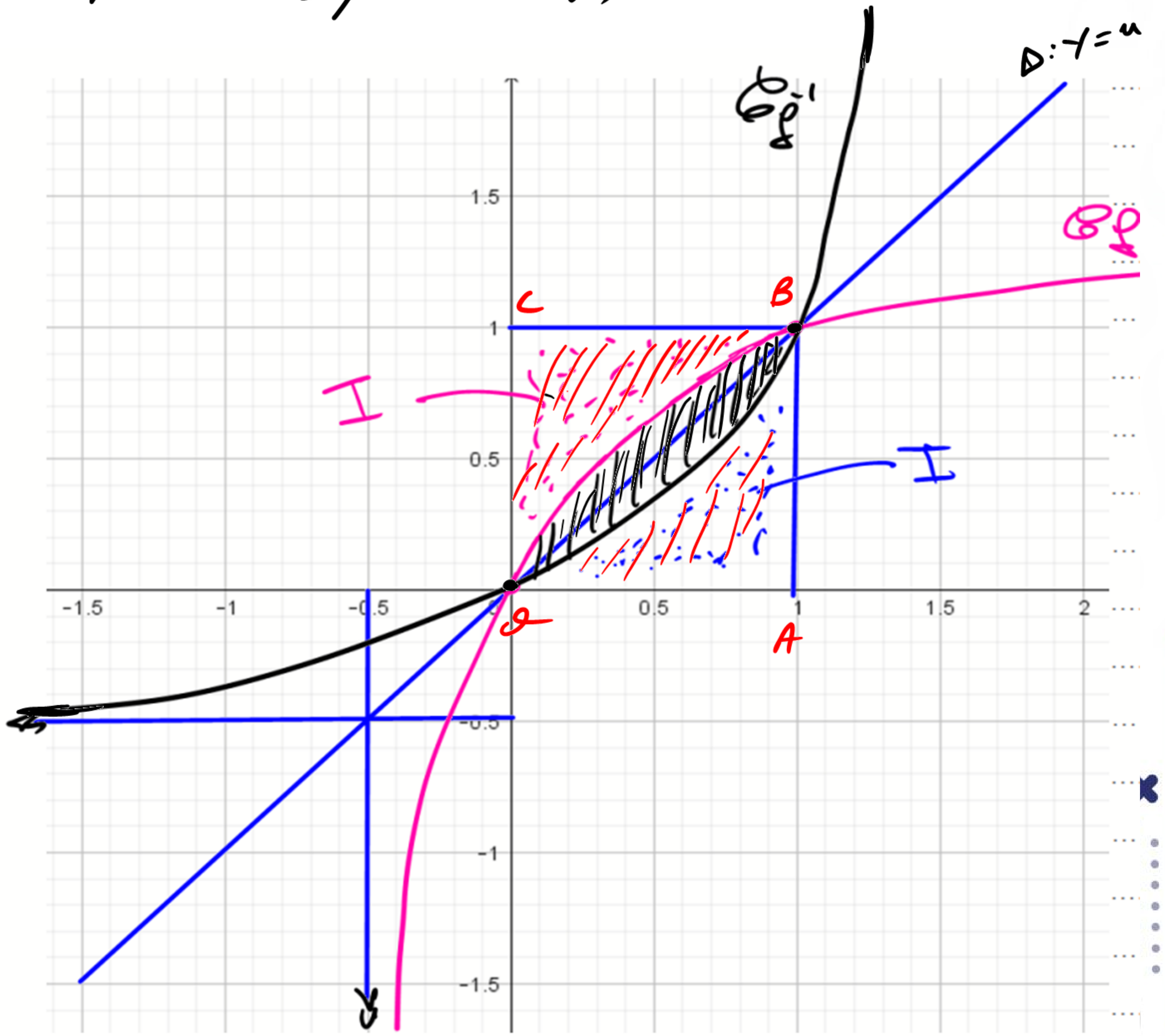
5) a) Montrer que f réalise une bijection de]-1/2 , +∞[sur un intervalle J que l'on précisera.



. On a f continue et strictement croissante sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ sur $f(]-\frac{1}{2}, +\infty[) = \mathbb{R} = J$

b) Tracer $\zeta_{f^{-1}}$ dans le même repère que ζ_f.

$\mathcal{C}_{f^{-1}} = S_{\Delta : y = x}(\mathcal{C}_f)$



c) Déterminer l'aire de la partie limitée par ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{(OABC)} - 2I$$

$$\mathcal{A} = 1 - 2I \ \text{u.A}$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Suite intégrale

4$^{\text{ème}}$ année

Exercice N°1

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt \ , \ n \in IN^* \end{cases}$

1/ a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

2/ En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \in$ IN* on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos t\, dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\, I_{n-2}.$$

b) En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2-t^3)\sin t\, dt$

1/ a) Calculer I_0.

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t)\, dt$$

$$= \left[-\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0)$$

$$I_0 = 1$$

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt\ ,\ n \in IN^* \end{cases}$

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin(t)\, dt$

On pose

$u(t) = t \longrightarrow u'(t) = 1$

$v'(t) = \sin(t) \longrightarrow v(t) = -\cos(t)$

$I_1 = \left[-t\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\, dt$

$= \left[-t\cos(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0)\right)$

$I_1 = 1$

4ème année

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\,dt\ ,\ n \in IN^* \end{cases}$

2/ En utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \in IN^*$ on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos t\,dt$.

$\forall n \in IN^*$

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin(t)\,dt$$

On pose

$U(t) = t^n \longrightarrow U'(t) = n\,t^{n-1}$

$V'(t) = \sin(t) \longrightarrow V(t) = -\cos(t)$

$$I_n = \Big[-t^n \cos(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos(t)\,dt$$

$$= \left(-\left(\frac{\pi}{2}\right)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0\right) + n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos(t)\,dt$$

d'où

$\forall n \in IN^*$

$$I_n = n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos(t)\,dt$$

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt \;,\; n \in IN^* \end{cases}$

pour tout $n \in IN^*$ on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos t\, dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)I_{n-2}.$$

$\forall\ n \geq 2$

$$I_n = n.\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1} \cos(t)\, dt$$

On pose

$U(t) = t^{n-1} \longrightarrow u'(t) = (n-1)\,t^{n-2}$

$v'(t) = \cos(t) \longrightarrow v(t) = \sin(t)$

$$I_n = n.\left(\left[t^{n-1} \sin(t)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-2} \sin(t)\, dt \right)$$

$$= n.\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} . \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 - (n-1)\, I_{n-2} \right)$$

$$= n\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - (n-1)\, I_{n-2} \right)$$

$$I_n = n.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n.(n-1)\, I_{n-2}$$

$\forall\ n \geq 2.$

Soit (I_n) la suite définie par : $\begin{cases} I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\, dt \\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t\, dt\ ,\ n \in IN^* \end{cases}$

$$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\, I_{n-2}\,.$$

b) En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2-t^3)\sin t\, dt$

$\forall\, n \geq 2\ ;\ I_n = n.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\, I_{n-2}$

$I_2 = 2.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2-1} - 2.(2-1)\, I_0$

$= \pi - 2\, I_0$

$I_2 = \pi - 2$

$I_3 = 3.\left(\frac{\pi}{2}\right)^{3-1} - 3.(3-1)\, I_1$

$= 3.\frac{\pi^2}{4} - 6$

$I_3 = \frac{3\pi^2}{4} - 6$

, Puis la valeur de l'intégrale $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2t+t^2-t^3)\sin t\,dt$

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2t+t^2-t^3)\sin(t)\,dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin(t)-2t\sin(t)+t^2\sin(t)-t^3\sin(t)\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(t)\,dt-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\sin(t)\,dt+\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\sin(t)\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}t^3\sin(t)\,dt$$

$$J=I_0-2I_1+I_2-I_3$$

$$=1-2+\pi-2-\left(\frac{3\pi^2}{4}-6\right)$$

$$=\frac{-3\pi^2}{4}+\pi+3.$$

$$J=\frac{-3\pi^2}{4}+\pi+3$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Suite intégrale

Exercice N°2

On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1.

   b) calculer $U_1 + U_3$; En déduire la valeur de U_3

2) Montrer que pour tout ,$n \in \mathbb{N}$: U_n 0.

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire quelle est convergente.

Montrer que : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n)

1) a) Calculer U_1.

$$U_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$\frac{u'}{2\sqrt{u}} \xrightarrow{P} \sqrt{u}$

$$= \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

(u' ; $2\sqrt{u}$)

$$= \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$$

$$U_1 = \left[\sqrt{1+x^2} \right]_0^1$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1}$$

$$U_1 = \sqrt{2} - 1$$

On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

b) calculer $U_1 + U_3$; En déduire la valeur de U_3

$$U_1 + U_3 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x + x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$\sqrt{1+x^2}^{\,2}$

$$= \int_0^1 x \cdot \sqrt{1+x^2}\,dx$$

$$U'\sqrt{U} \xrightarrow{P} \frac{2}{3}\, U \cdot \sqrt{U}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \underbrace{2x}_{U'} \cdot \underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{\sqrt{U}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{3}\left[(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$$

$U_1 + U_3 = \frac{1}{3}\left[(1+x^2)\sqrt{1+x^2}\right]_0^1$

$= \frac{1}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

d'où

$U_1 + U_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3}$

En déduire la valeur de U_3

$U_3 = \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - U_1$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - (\sqrt{2} - 1)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{2} - \frac{1}{3} - \sqrt{2} + 1$

$= -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{2}{3}$

d'où

$U_3 = \frac{2}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}$

On définit la suite: $U_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, n ∈N

2) Montrer que pour tout ,n ∈N : $U_n \geqslant 0$.

. Montrons que $\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geqslant 0$??

• $x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $[0,1]$

on a $0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^n \leq 1$

par suite

$0 \leq x \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1$

$\Rightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2$

$\Rightarrow 0 < 1 \leq \sqrt{1+x^2} \leq \sqrt{2}$

Donc • $\frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \geqslant 0 \quad \forall x \in [0,1]$

D'où $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \geqslant 0$

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire quelle est convergente.

$\bullet\ U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$

$\bullet\ x \longmapsto \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}$ est continue sur $[0,1]$

par suite on

$\bullet\ \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}} \leq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ (+) (−)

donc $\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \leq 0$

on $U_{n+1} - U_n \leq 0$

D'où $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante

3) Montrer que la suite (U_n) est décroissante. En déduire quelle est convergente.

• on a $U_n \geq 0$

(U_n) est décroissante et

minorée par 0

Donc

(U_n) est convergente

4ème année

On définit la suite: $U_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$, $n \in \mathbb{N}$

4) Montrer que : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \le U_n \le \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n)

On $0 \le x \le 1$

$\Rightarrow 0 \le x^2 \le 1$

$\Rightarrow 1 \le 1 + x^2 \le 2$

$\Rightarrow 1 \le \sqrt{1+x^2} \le \sqrt{2}$

$\Rightarrow \sqrt{1+x^2} \geq 1$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \le 1$

On $x^n \geq 0$

$\frac{x^n}{\sqrt{2}} \le \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}} \le x^n$

$x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}$ et $x \mapsto x^n$ sont

des fonctions continues sur $[0,1]$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^n\,dx \le \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \le \int_0^1 x^n\,dx$

Montrer que : $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire la limite de la suite (U_n)

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 x^n\,dx \leq U_n \leq \int_0^1 x^n\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq U_n \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n+1} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Donc $\frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}(n+1)} = 0$

et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = 0$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Suite intégrale

Taki Academy
www.takiacademy.com

Exercice N°3

On considère la suite (I_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$

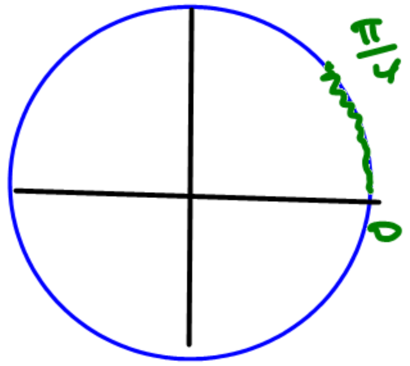
b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \dfrac{1}{n+1}$

b) En déduire la limite de la suite (I_n)

3) Calculer I_2 et I_4



On considère la suite (I_n) *définie sur* $\mathbb{N}^*$ *par* $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \, dx \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*$

- $x \mapsto \tan(x)$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$
- $x \mapsto (\tan(x))^n$ est continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$
- il est claire que

$(\tan(x))^n \geq 0 \quad \forall\, x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \, dx \geq 0$

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$

b) Montrer que (I_n) est une suite décroissante

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+1}(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^{n+1}(x) - \tan^n(x)\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \left(\tan(x) - 1\right) dx$$

$x \longmapsto \tan^n(x)\left(\tan(x) - 1\right)$ est

continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

on $\tan^n(x) \geq 0$

et $\tan(x) - 1 \leq 0$

car $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$

$\tan(x) \leq 1$

Donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

on : $\tan^n(x)(\tan(x) - 1) \leq 0$

Donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)(\tan(x) - 1)\,dx \leq 0$

Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$

Doù (I_n) est décroissante

c) En déduire que (I_n) est une suite convergente

on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n \geq 0$

donc (I_n) est décroissante

et minorée par 0

Donc (I_n) est une suite convergente.

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n \, dx$.

2) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

$$I_n + I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^n \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))^{n+2} \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\tan^n(x) + \tan^{n+2}(x) \right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x) \left(1 + \tan^2(x) \right) dx$$

$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan(x))' (\tan(x))^n \, dx$$

$u' \cdot u^n \xrightarrow{P} \frac{1}{n+1} u^{n+1}$

$$= \left[\frac{1}{n+1} \cdot (\tan(x))^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{n+1} \left(\Big(\underbrace{\tan\left(\tfrac{\pi}{4}\right)}_{1}\Big)^{n+1} - (\tan(0))^{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{n+1}$$

Donc $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b) En déduire la limite de la suite (I_n)

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\underset{\geq 0}{I_n} + \underset{\geq 0}{I_{n+2}} = \frac{1}{n+1}$

On $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

et on $I_n \geq 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

3) Calculer I_2 et I_4

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1 + \tan^2(x) - 1\right) dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1 + \tan^2(x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1\, dx$$

$$= \left[\tan(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi}{4}$$

$$= \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \tan(0) - \frac{\pi}{4}$$

$$= 1 - \frac{\pi}{4}$$

Donc $\boxed{I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}}$

On $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

pour $n = 2$

$\Rightarrow I_2 + I_4 = \frac{1}{3}$

donc $I_4 = \frac{1}{3} - I_2$

$= \frac{1}{3} - \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

donc

$\boxed{I_4 = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}}$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Exercice 4

On considère les suite (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$I_n = \int_0^1 t^n \cos t\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^1 t^n \sin t\, dt.$$

1°) a) Montrer que la suite (I_n) est à terme positifs.

b) Etudier la monotonie de la suite (I_n).

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3°) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel $n \in IN^*$,

$$I_{n+1} = -(n+1)J_n + \sin(1)$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

1°) a) Montrer que la suite (I_n) est à terme positifs.

On a $I_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\, dt$

• $t \mapsto t^n \cos(t)$ est continue sur $[0,1]$

On a $0 \leq t \leq 1 < \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \cos(t) > 0$ et $t^n \geq 0$

donc $\forall t \in [0,1]$, $t^n \cos(t) \geq 0$

Ainsi $I_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\, dt \geq 0$

b) Etudier la monotonie de la suite (I_n).

$\cdot\ I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1}\cos(t)\,dt - \int_0^1 t^n \cos(t)\,dt$

$= \int_0^1 t^{n+1}\cos(t) - t^n\cos(t)\,dt$

$= \int_0^1 t^n\cos(t)(t-1)\,dt$

On $\cdot\ t \mapsto t^n\cos(t)(t-1)$ est continue sur $[0,1]$

par suite

$\forall\, t \in [0,1]$, $t^n \cos(t) \geq 0$

et $(t-1) \leq 0$

d'où $\cdot\ t^n\cos(t)(t-1) \leq 0$

$\forall\, t \in [0,1]$

D'où $\int_0^1 t^n\cos(t)(t-1)\,dt \leq 0$

par suite

$I_{n+1} - I_n \leq 0$

d'où (I_n) est décroissante

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente.

on a (I_n) est décroissante

et minorée par 0

Donc (I_n) est convergente

2°) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, $I_n \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

on a $I_n = \int_0^1 t^n \cos(t)\, dt$

$\forall\ t \in [0,1] \Rightarrow \cos(t) \leq 1$

on a $t^n \geq 0$

$\Rightarrow t^n \cos(t) \leq t^n$

les fonctions $t \longmapsto t^n$ et $t \longmapsto t^n \cos(t)$ sont continues sur $[0,1]$

donc $\int_0^1 t^n \cos(t)\, dt \leq \int_0^1 t^n\, dt$

$I_n \leq \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1}\right]_0^1$

donc

$I_n \leq \frac{1}{n+1} - \frac{0}{n+1}$

$\forall\ n \in \mathbb{N}^*$

$$I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

on $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

on $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

d'où $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$

3°) a) À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que, pour tout entier naturel $n \in IN^*$,

$I_{n+1} = -(n+1)J_n + \sin(1)$

$$I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1} \cos(t)\, dt$$

on pose

$u(t) = t^{n+1} \longrightarrow u'(t) = (n+1).t^n$

$v'(t) = \cos(t) \longrightarrow v(t) = \sin(t)$

$$I_{n+1} = \left[t^{n+1} \sin(t)\right]_0^1 - (n+1)\underbrace{\int_0^1 t^n \sin(t)\, dt}_{J_n}$$

$$= \left(1^{n+1} . \sin(1) - 0\right) - (n+1) J_n$$

$$\boxed{I_{n+1} = \sin(1) - (n+1) J_n} \quad \forall n \in IN^*$$

b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = 0$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$I_{n+1} = \sin(1) - (n+1)J_n$$

$$\Leftrightarrow (n+1)J_n = \sin(1) - I_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow J_n = \frac{\sin(1)}{n+1} - \frac{I_{n+1}}{n+1}$$

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin(1)}{n+1} = 0$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{n+1}}{n+1} = 0$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Exercice N°5

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer I_0.

2. Montrer, a l'aide d'une intégration par parties, que $I_1 = \frac{2}{5} I_0$.

3. a. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.
   b. En déduire qu'elle est convergente.

4. a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.
   b. Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

1. Calculer I_0.

$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

$u'\sqrt{u} \xrightarrow{P} \frac{2}{3}\, u.\sqrt{u}$

$= -\int_0^1 \underbrace{-}_{u'}\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\sqrt{u}}\,dx$

$= -\left[\frac{2}{3}(1-x).\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$= -\frac{2}{3}.0 + \frac{2}{3} \Rightarrow I_0 = \frac{2}{3}$

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Montrer, a l'aide d'une intégration par parties, que $I_1 = \frac{2}{5} I_0$.

$$I_1 = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx$$

on pose

$$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sqrt{1-x} \longrightarrow v(x) = -\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$$

$$I_1 = \left[-\frac{2}{3}x(1-x)\cdot\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= 0 + \frac{2}{3}\int_0^1 (1-x)\sqrt{1-x}\,dx$$

$$I_1 = \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx}_{I_0} - \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^1 x.\sqrt{1-x}\,dx}_{I_1}$$

$$I_1 = \frac{2}{3}I_0 - \frac{2}{3}I_1$$

$$\Leftrightarrow I_1 + \frac{2}{3}I_1 = \frac{2}{3}I_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3}I_1 = \frac{2}{3}I_0$$

d'où $I_1 = \frac{2}{5}I_0$

On considère la suite (I_n) définie par $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3 **a** Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x} - x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,(x-1)\,dx$$

• $x \mapsto x^n\sqrt{1-x}\,(x-1)$ est continue sur $[0,1]$

et $\forall x \in [0,1]$

on $x^n\sqrt{1-x} \geq 0$

et $(x-1) \leq 0$

Donc $x^n\sqrt{1-x}\,(x-1) \leq 0$

Donc $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,(x-1)\,dx \leq 0$

Ainsi $I_{n+1} - I_n \leq 0$

D'où (I_n) est décroissante

b En déduire qu'elle est convergente.

$$I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx$$

$x \longmapsto x^n\sqrt{1-x}$: continue et positive

sur $[0,1]$

Donc $\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx = I_n \geq 0$

Par suite, (I_n) est décroissante

et minorée par 0

Donc elle est **convergente**

4 a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

on $I_n = \int_0^1 u^n \sqrt{1-u}\, dx$

on $0 \leq u \leq 1$

$\Rightarrow -1 \leq -u \leq 0$

$\Rightarrow 0 \leq 1-u \leq 1$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-u} \leq 1$

et on $\forall u \in [0,1]$, $u^n \geqslant 0$

donc $0 \leq u^n \cdot \sqrt{1-u} \leq u^n$

les fonctions $u \mapsto u^n\sqrt{1-u}$ et $u \mapsto u^n$

sont continues sur $[0,1]$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 u^n \sqrt{1-u}\, du \leq \int_0^1 u^n\, dx$

$0 \leq I_n \leq \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow$ $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

b Déterminer alors la limite de la suite (I_n).

on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

on a $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Donc $\lim_{n \to +\infty} I_n = 0$

Mathématiques

Théme : Intégrale

Suite intégrale

Exercice N°8

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

1. Calculer u_1.
2. a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
   b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \times u_n$.
   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

1. Calculer u_1.

$$U_1 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{0} \frac{\overbrace{2(x+1)}^{u'}}{\underbrace{\sqrt{x^2+2x+2}}_{\sqrt{u}}}\,dx$$

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} \xrightarrow{P} 2\sqrt{u}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\cdot\left[2\sqrt{x^2+2x+2}\right]_{-1}^{0}$$

$$= \sqrt{2} - \sqrt{1-2+2}$$

$$U_1 = \sqrt{2} - 1$$

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

2 **a** Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

$u_{n+1} \leq u_n$??

On a $u_{n+1} = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$

. $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [-1, 0]$.

$\Rightarrow -1 \leq x \leq 0 \Rightarrow 0 \leq x+1 \leq 1$

$\forall a \in [0,1] \Rightarrow a^{n+1} \leq a^n$

$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$\Rightarrow (x+1)^{n+1} \leq (x+1)^n$.

. $\forall x \in [-1, 0]$, $\sqrt{x^2+2x+2} > 0$

$\Rightarrow \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+2x+2}} \leq \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

. Les fonctions $x \mapsto \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

et $x \mapsto \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ sont continues

sur $[-1, 0]$

$$\Rightarrow \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+1}}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx \leq \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n}}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$$

Donc **(U_n) est décroissante**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

b En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [-1,0]$

$x \longmapsto \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}$ est continue

et positive sur $[-1,0]$

Donc $\int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx \geq 0$

Donc **$U_n \geq 0$**

Ainsi **(U_n) est décroissante et minorée par 0, Donc elle est convergente.**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$

3 a Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \times u_n$.

$$U_{n+2} = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^{n+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx$$

On pose

$$U(x) = (x+1)^{n+1} \longrightarrow U'(x) = (n+1).(x+1)^n$$

$$V'(x) = \frac{(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+2}} \longrightarrow V(x) = \sqrt{x^2+2x+2}$$

$$U_{n+2} = \left[(x+1)^{n+1}.\sqrt{x^2+2x+2}\right]_{-1}^{0} - (n+1)\int_{-1}^{0}(x+1)^n.\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$$

$$= \sqrt{2} - (n+1).\int_{-1}^{0}(x+1)^n.\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$$

$(x^2+2x+1)+1$

$$= \sqrt{2} - (n+1).\int_{-1}^{0}(x+1)^n.\frac{x^2+2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

$$= \sqrt{2} - (n+1).\int_{-1}^{0}(x+1)^n.\frac{(x+1)^2+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$$

$$= \sqrt{2} - (n+1) \int_{-1}^{0} \frac{(u+1)^{n+2} + (u+1)^{n}}{\sqrt{u^2+2u+2}}\, dx$$

$$= \sqrt{2} - (n+1) \int_{-1}^{0} \frac{(u+1)^{n+2}}{\sqrt{u^2+2u+2}}\, dx$$

$$- (n+1) \cdot \int_{-1}^{0} \frac{(u+1)^{n}}{\sqrt{u^2+2u+2}}\, dx$$

$$U_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1) \cdot U_{n+2} - (n+1) \cdot U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+2} + (n+1) U_{n+2} = \sqrt{2} - (n+1) U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+2} \cdot (n+2) = \sqrt{2} - (n+1) U_n$$

$$\Rightarrow \boxed{U_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} U_n}$$

b En déduire $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

on a (U_n) est une suite convergente
soit ℓ sa limite

on $\lim_{n \to +\infty} U_{n+2} = \lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$

On $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} u_n$

par suite

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+2} = 0$

et

$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n+2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1+\frac{2}{n}\right)}$

$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} = 1$ ($\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{2}{n} \to 0$)

$\Rightarrow \ell = 0 - \ell$

$\Rightarrow 2\ell = 0$

$\Rightarrow \ell = 0$

Ainsi $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Théme : Intégrale

Suite intégrale

4ème année

Exercice N°6

Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par: $u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} u_n$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a: $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ et montrer que pour tout $p \geq 2$, on a: $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $-2+2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1+2\sqrt{n}$

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a: $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ et montrer que pour tout $p \geq 2$, on a: $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

On a $p \geq 1$.

$1 \leq p \leq x \leq p+1$

$\Rightarrow \sqrt{p} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{p+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$

les deux fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{p}}$

sont continues sur $[p, p+1]$

1 Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a: $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$ et montrer que pour tout $p \geq 2$, on a: $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$

Donc on intègre

on obtient

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{p}}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{p}}(p+1-p)$$

d'où $\forall\, p \geq 1$; $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$

. par suite

$p \geq 2$ on $1 \leq p-1 \leq x \leq p$

$$\Rightarrow \sqrt{p-1} \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{p}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$: les deux fonctions sont continues sur $[p-1, p]$

$\forall\, p \geq 2$,

On intègre

on obtient

$$\int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \geq \int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{p}}\,dx$$

$$\int_{p-1}^{p} \frac{du}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}\left(p - p + 1\right)$$

d'où

$\forall p \geq 2$, $$\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

2 En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a: $-2+2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1+2\sqrt{n}$

On a $U_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$.

On a $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq \int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \forall p \geq 2.$

$$\Rightarrow \sum_{p=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}} \leq \sum_{p=2}^{n} \int_{p-1}^{p} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$U_n - 1 \leq \int_{1}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx + \int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x}} + \cdots +$$

$$\cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \quad U_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$\Rightarrow \quad U_n - 1 \leq \left[2\sqrt{x}\right]_1^n$$

$$U_n - 1 \leq 2\sqrt{n} - 2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_n \leq 2\sqrt{n} - 1}$$

par suite on

$\forall\, p \geq 1$ on

$$\int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{n} \int_p^{p+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq \underbrace{\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}}_{U_n}$$

$$\Rightarrow \quad \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \leq U_n$$

$\Rightarrow \left[2\sqrt{x}\right]_{n}^{n+1} \leq u_n$

$\Rightarrow 2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$

Alors

$2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n \leq 2\sqrt{n} - 1$

3 Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

On a $2\sqrt{n+1} - 2 \leq u_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\sqrt{n+1} - 2 = +\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

On a $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot U_n$

On $2\sqrt{n+1} - 2 \leq U_n \leq 2\sqrt{n} - 1$

$\Rightarrow \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot U_n \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$2 \cdot \sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \leq v_n \leq 2 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

On $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{2}{\sqrt{n}} = 2$ ($\frac{1}{n} \to 0$, $\frac{2}{\sqrt{n}} \to 0$)

et $\lim\limits_{n \to +\infty} 2 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 2$ ($\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$)

Donc

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = 2$$

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Magazines

Exercice 1 — 25 min — 4 pt

1) Calculer : $\int_0^2 \frac{dt}{(2+t)^2}$; $\int_0^2 \frac{dx}{\cos^2 x}$; $\int_0^2 \frac{2x}{\cos^2 x^2}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin^3 x \, dx$;

$\int_0^1 \frac{t}{(2+t^2)^2}dt$; $\int_0^{\pi} \frac{2\sin t}{(2+\cos t)^3}dt$; $\int_{-1}^0 \frac{t}{(t^2+1)^3}dt$; $\int_0^2 (1-|x-1|^3)dx$;

2) Calculer en intégrant par partie :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t.\sin t \, dt$; b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^0 (4x+1).\cos x \, dx$; c) $\int_0^{\pi} x^2 \sin 2x dx$

Exercice 2 — 25 min — 5 pt

On donne $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^n \sin t \, dt$, $n \in IN^*$

1/ a) Calculer I_0.

b) Calculer I_1 par une intégration par parties.

2/ En utilisant une intégration par parties, que pour tout n $\in$ IN* on a : $I_n = n\int_0^{\frac{\pi}{2}} t^{n-1}\cos t \, dt$.

3/ a) Montrer, en utilisant une intégration par parties, que pour tout $n \geq 2$ on a :

$I_n = n\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1} - n(n-1)\, I_{n-2}$.

b) En déduire I_2 et I_3. Puis la valeur de l'intégrale $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-2t+t^2-t^3)\sin t \, dt$

Exercice 3 — 25 min — 5 pt

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Si f est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

2°) Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ alors f et g sont égales sur $[a,b]$.

3°) Pour tout x et t on a : $\int_0^1 t x^2 dt = \int_0^1 t x^2 dx$.

4°) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt$.

5°) $\int_{-1}^1 \frac{x^4 \sin x}{\sqrt{1+x^2}} dt = 0$.

6°) Si f est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T} f(t)dt = 2\int_0^T f(t)dt$.

Taki Academy
www.takiacademy.com
73.832.000
Magazines

Exercice 4 — 25 min — 5 pt

Soit f la fonction définie sur IR par : $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1°) Etudier les variations de f et tracer C_f.

2°) Soit G la fonction définie par $G(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Montrer que G est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

3°) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=G(\tan x)$.

a) Montrer que $H'(x)=1$, en déduire $H(x)$ pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer alors que $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt=\frac{\pi}{4}$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt$.

Exercice 5 — 25 min — 5 pt

On considère une fonction f continue sur $[0,+\infty[$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
f	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1°) Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :

a) Trouver un encadrement de f sur $[0,+\infty[$.

b) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{f(x)-1}$.

2°) Soit h la restriction de la fonction f à l'intervalle $[0,1]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de $[0\,;1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

Taki Academy
www.takiacademy.com
www.takiacademy.com
Magazines

Taki Academy
www.takiacademy.com

3°) Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$, et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Dresser le tableau de variation de g puis construire la courbe $\mathcal{C}$.

4°) Soit $I=\int_0^1 g(x)\,dx$ et $J=\int_0^1 x\,g'(x)\,dx$.

a) Donner une interprétation graphique de I.

b) Montrer que $1 \leq I \leq 2$.

c) Calculer $I+J$.

d) En déduire que : $0 \leq J \leq 1$.

www.takiacademy.com

Magazines
73.832.000

Taki Academy
www.takiacademy.com

ترهني على قرايتك

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC Economie

Chapitre : Intégrale d'une fonction continue

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Magazines

Taki Academy

EXERCICE N° 1 | 20' | 4 point

Choisir la bonne réponse :

1. $\int_2^6 dx =$

(a) 8 (b) 3 (c) 4

$$\int_2^6 dx = \int_2^6 1\, dx = [x]_2^6 = 6-2 = 4$$

2. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x+1} dx =$

(a) 0 (b) 2 (c) n'existe pas

$x \mapsto \frac{1}{x+1}$ n'est pas définie en -1

Donc f n'est pas continue sur $[-1,1]$ et par suite cet integrale n'existe pas

3. $\int_0^{\ln 2} e^x dx =$

(a) 1 (b) ln 2 (c) 0

$$\int_0^{\ln 2} e^x dx = [e^x]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1$$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices... | Votre solde 0 pts | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

4. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx =$

(a) $\frac{1}{e}-1$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $e-1$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_1^e \underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx \qquad \frac{1}{2}u^2 \leftarrow u'u$$

$$= \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e$$

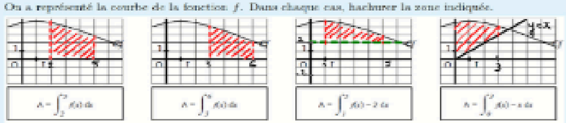
$$= \frac{1}{2}\ln^2 e - \frac{1}{2}\ln^2(1)$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 - \frac{1}{2}\times 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

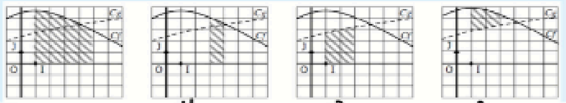
EXERCICE N° 2 | 30' | 5 point

1. On a représenté la courbe de la fonction f. Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.



2. On a représenté les courbes des fonctions f et g. Dans chaque cas, hachurer la zone indiquée.

3.



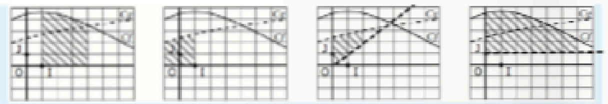
$\int_1^5 f(x)\,dx$ $\int_3^4 g(x)\,dx$ $\int_1^3 g(x)\,dx$ $\int_1 (f(x)-g(x))\,dx$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Taki Academy
www.takiacademy.com



$\int_1^4 g(x)\,dx$ $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$ $\int_0^2 (g(x)-x)\,dx$ $\int_0^6 (f(x)-1)\,dx$

EXERCICE N° 3 35' 6 point

1. Calculer les intégrales suivantes en respectant les étapes (on demande les valeurs exactes).

$A=\int_1^2 x^2dx$; $B=\int_0^2 (x^5+x^3)\,dx$; $C=\int_2^1 \frac{dx}{x^2}$; $D=\int_0^1 e^x dx$; $E=\int_1^2 \left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx$

$J=\int_0^2 e^{2x}dx$; $K=\int_0^1 2x^3+5xdx$; $L=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx$; $M=\int_1^e \frac{dx}{x}$; $N=\int_{-1}^1 e^{-x}dx$

$A=\int_1^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3}-\frac{1}{3} = \frac{7}{3}$

$B=\int_0^2 (x^5+x^3)\,dx = \left[\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}\right]_0^2$
$= \left(\frac{64}{6}+\frac{16}{4}\right) - 0 = \frac{44}{3}$

$C=\int_2^1 \frac{dx}{x^2} = \int_2^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 -\frac{1}{x^2}\,dx$
$= \left[\frac{1}{x}\right]_1^2 = \frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$

$D=\int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1$
$= e^1 - e^0 = e-1$

www.takiacademy.com
Magazines 73.832.000
Magazines 73.832.000

62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf 62e1189da6c34_6....pdf Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance
Taki Academy

$$E=\int_1^2\left(\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}\right)dx=\int_1^2\frac{3}{x^2}dx-\int_1^2\frac{2}{x}dx$$

$$=3\int_1^2\frac{1}{x^2}dx-2\int_1^2\frac{1}{x}dx$$

$$=3\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2-2\left[\ln x\right]_1^2$$

$$=3\left(-\frac{1}{2}+1\right)-2\left(\ln 2-\ln 1\right)$$

$$=\boxed{\frac{3}{2}-2\ln 2}$$

$$J=\int_0^2 e^{2x}dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^2=\frac{1}{2}e^4-\frac{1}{2}e^0$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\left(e^4-1\right)}$$

$$K=\int_0^1\left(2x^3+5x\right)dx=\left[\frac{2}{4}x^4+\frac{5}{2}x^2\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^4+\frac{5}{2}x^2\right]=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\boxed{3}$$

$$L=\int_1^2\frac{\ln x}{x}dx=\int_1^2\underbrace{\frac{1}{x}}_{u'}\underbrace{\ln x}_{u}\,dx$$

$\frac{1}{2}u^2 \leftarrow u'u$

$$=\left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln^2 2-\frac{1}{2}\ln^2 1$$

$$=\boxed{\frac{1}{2}\ln^2(2)}$$

$$M=\int_1^e\frac{dx}{x}=\int_1^e\frac{1}{x}dx=\left[\ln x\right]_1^e$$

$$=\ln e-\ln 1=1-0=\boxed{1}$$

$$N=\int_{-1}^1 e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_{-1}^1$$

$$=\left[e^{-x}\right]_1^{-1}=e^1-e^{-1}=e-\frac{1}{e}$$

$$=\boxed{\frac{e^2-1}{e}}$$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Taki Academy
www.takiacademy.com

2. En utilisant une intégration par partie, calculer les intégrales :

$$\int_0^1 xe^{-x}dx \; ; \; \int_1^e x\ln x\,dx \; ; \; \int_1^e \ln x\,dx \; ; \; \int_0^{\pi} x\cos x\,dx \; ; \; \int_0^1 t^2e^t\,dt$$

$$I=\int_0^1 x e^{-x}\,dx \qquad u(x)=x \longrightarrow u'(x)=1 \qquad v'(x)=e^{-x} \longleftarrow v(x)=-e^{-x}$$

$$=\left[-xe^{-x}\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}\,dx$$

$$=-e^{-1}+\left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$=-e^{-1}+\left(-e^{-1}+e^{0}\right)$$

$$=-e^{-1}-e^{-1}+1$$

$$=\boxed{1-2e^{-1}}$$

$$I=\int_1^e x\ln x\,dx \qquad u(x)=\ln x \longrightarrow u'(x)=\frac{1}{x} \qquad v'(x)=x \longleftarrow v(x)=\frac{1}{2}x^2$$

$$I=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_1^e-\int_1^e \frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^2-\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{e^2+1}{4}}$$

$$I=\int_1^e \ln x\,dx \qquad u(x)=\ln x \longrightarrow u'(x)=\frac{1}{x} \qquad v'(x)=1 \longleftarrow v(x)=x$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^e-\int_1^e 1\,dx$$

$$=\left[x\ln x\right]_1^e-\left[x\right]_1^e$$

$$=\left[x\ln x-x\right]_1^e$$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content

$$= (e\ln e - e) - (\ln 1 - 1)$$

$$= \boxed{1}$$

$$I = \int_0^{\pi} x\cos x \, dx \qquad u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1 \quad v'(x) = \cos x \longleftarrow v(x) = \sin x$$

$$= \left[x\sin x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx$$

$$= 0 - \left[-\cos x\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[\cos x\right]_0^{\pi} = \cos\pi - \cos 0 = -1-1 = \boxed{-2}$$

$$I = \int_0^1 t^2 e^t \, dt \qquad u(t) = t^2 \longrightarrow u'(t) = 2t \quad v'(t) = e^t \longleftarrow v(t) = e^t$$

$$= \left[t^2 e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2t\, e^t \, dt$$

$$= (e - 0) - 2\int_0^1 t\, e^t \, dt$$

$$= e - 2\int_0^1 t\, e^t \, dt$$

Soit $J = \int_0^1 t\, e^t \, dt$ $\qquad u(t) = t \longrightarrow u'(t) = 1 \quad v'(t) = e^t \longleftarrow v(t) = e^t$

$$= \left[t e^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t \, dt$$

$$= e - \left[e^t\right]_0^1 = e - (e-1) = 1$$

D'où $I = e - 2J = \boxed{e - 2}$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

EXERCICE N° 4 | 35' | 6 point

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

On désigne par $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 2cm)

1. (a) Vérifier que $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x + 1}$

$$3 - \frac{4}{e^x+1} = \frac{3(e^x+1) - 4}{e^x+1} = \frac{3e^x+3-4}{e^x+1}$$

$$= \frac{3e^x - 1}{e^x+1} = f(x)$$

Donc $f(x) = 3 - \frac{4}{e^x+1}$

(b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x)$; interpréter les résultats obtenus.

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3 - \frac{4}{e^x+1} = 3 - 0 = 3$$

D_1 : $y = 3$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x+1} = \frac{-1}{1} = -1$$

D_2 : $y = -1$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $-\infty$

2. (a) Montrer que $f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$ on a :

$$f'(x) = \frac{3e^x(e^x+1) - e^x(3e^x-1)}{(e^x+1)^2} = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}$$

(b) Dresser le tableau de variation de f.

On a : $f'(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
f	-1	↗	3

62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf 62e1189da6c34_6....pdf Tout afficher
16:42

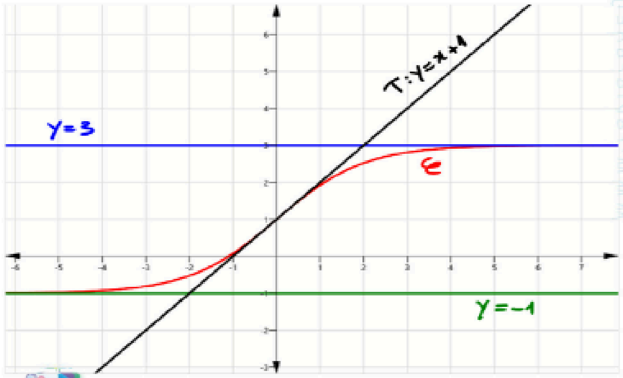
Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts
Salsabil Maali — Bac Informatique
Accueil · Mon profil · Offres · Matières · En direct · Porte monnaie · Assistance

(c) Écrire l'équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

$$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$= \frac{4}{4}x + 1$$

D'où $\boxed{T : y = x + 1}$

3. Tracer (T) et $(\mathscr{C})$.



4. (a) Montrer que $\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.

donc $\frac{e^x}{e^x+1} = \frac{U'(x)}{U(x)}$ $\quad U(x) = e^x + 1$, $U'(x) = e^x$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \left[\ln(e^x+1)\right]_0^1 \qquad \ln|U| \leftarrow \frac{U'}{U}$$
$$= \ln(e+1) - \ln(e^0+1)$$
$$= \ln(e+1) - \ln 2$$
$$= \boxed{\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)}$$

(b) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe $(\mathscr{C})$ et les droites d'équations respectives: $y = -1$; $x = 0$ et $x = 1$.

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (f(x) - (-1))\,dx = \int_0^1 (f(x)+1)\,dx$$
$$= \int_0^1 \frac{3e^x - 1 + e^x + 1}{e^x+1}\,dx = \int_0^1 \frac{4e^x}{e^x+1}\,dx$$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf · 62b9d4e65dbc7_....pdf · 62b9d25ae56ce_M....pdf · 62e1194082e84_M....pdf · 62e1189da6c34_6....pdf · Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint

app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120761-correction-magazine1-integrales/content

Chercher cours, examens ou exercices...

Votre solde 0 pts

Salsabil Maali
Bac Informatique

Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

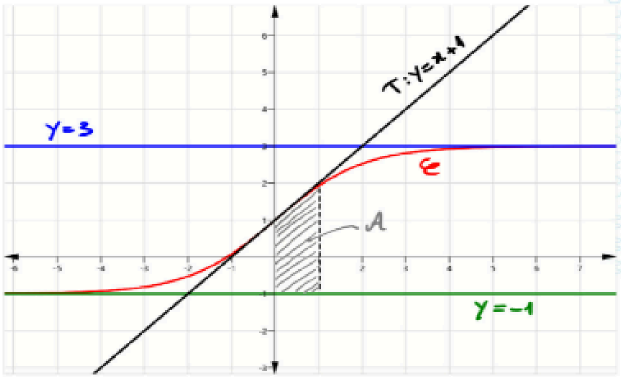
Taki Academy

$$= 4\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = 4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\ u.a$$

$$= 4 \times 4\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\ cm^2$$

$$= \boxed{16\ln\left(\frac{e+1}{2}\right)\ cm^2}$$

$1\ u.a = 2\times 2\ cm^2 = 4\ cm^2$



73.832.000

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kebili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Magazines

Exercice 1 — 36 min — 6 pt

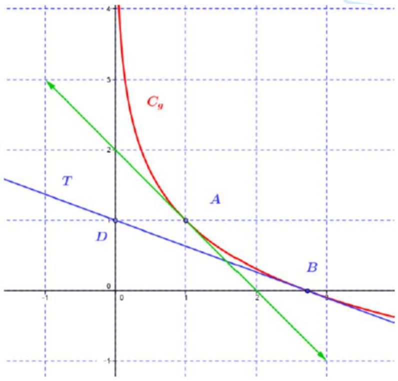
On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=(1-x)e^{-x}+1$.

1)
   a) Etudier les variations de g .
   b) Déduire que $g(x)>0$.
2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x}+x$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   a) Montrer que : $f'(x)=g(x)$.
   b) Dresser le tableau de variation de f .
   c) Montrer que $D: y=x$ est une asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.
   d) Etudier la position de $\mathcal{C}$ et D .
3) Tracer la courbe $\mathcal{C}$.
4)
   a) A l'aide d'une intégration par partie calculé l'intégrale : $\int_0^{\alpha} xe^{-x}dx$ avec $\alpha>0$.
   b) Déduire $A(\alpha)$: l'aire de la partie limitée par $\mathcal{C}$, la droite D et les droites d'équations $x=0$ et $x=\alpha$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} A(\alpha)$.

Exercice 2 — 42 min — 7 pt

La courbe C_g ci-contre représente une fonction g définie et dérivable sur $]0,+\infty[$.

La courbe C_g passe par le point $A(1,1)$ et coupe l'axe $(O,\vec{i})$ au point B d'abscisse e . La tangente T à la courbe C_g au point B passe par le point $D(0,1)$.



Partie A :

1) A l'aide d'une lecture graphique :
   a) Déterminer $g(e)$, $g(1)$, $g'(e)$ et $g'(1)$.
   b) Dresser le tableau de signe de g sur $]0,+\infty[$.
2) On suppose, dans la suite, que $g(x)=a+b\ln x$. Où a et b sont deux réels. Montrer que $a=1$ et $b=-1$.

Partie B :

www.takiacademy.com
Magazines

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=2+\frac{\ln x}{x}$.

On désigne par (C_f) la courbe représentative de f le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

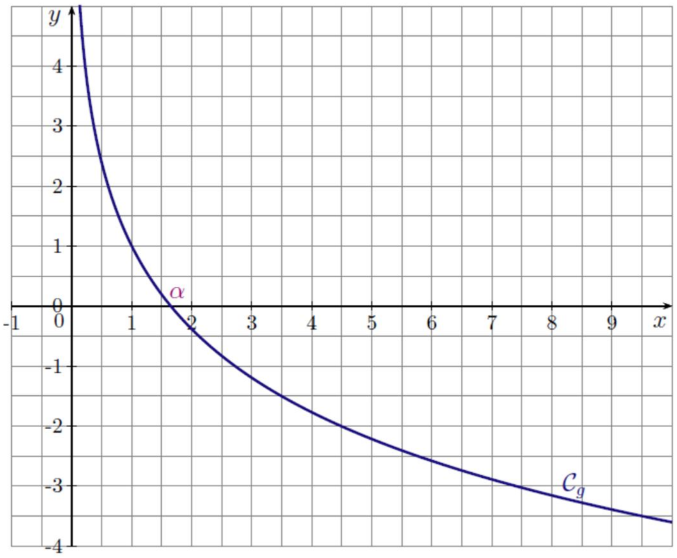
1) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement les résultats.
2)
   a) Montrer que pour tout x de l'intervalle $]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variation de f .
   c) Montrer que l'équation $f(x)=0$, admet une unique solution $\alpha\in\left]\frac{1}{e},\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.
3) Donner une équation cartésienne de la tangente T à C_f au point d'abscisse 1.
4) Tracer T et C_f .
5) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe C_f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 3 — 42 min — 7 pt

Partie A : Etude préliminaire

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $g(x)=1-2\ln(x)$.

On donne ci-dessous sa courbe représentative C_g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Cette courbe C_g coupe l'axe des abscisses



1) Déterminer la valeur exacte de α .
2) On admet que la fonction g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

   Donner, en justifiant, le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

Partie B : Etude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2\ln(x)+1}{x}$.

1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on appelle que : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$).

   On admettra que : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$.
2)
   a) Calculer $f'(x)$ et montrer que : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f .
3)
   a) Déterminer une primitive F de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

      On pourra remarquer que : $f(x)=2\times\dfrac{1}{x}\times\ln(x)+\dfrac{1}{x}$.
   b) Soit $I=\dfrac{1}{4}\int_1^5 f(x)dx$. Déterminer la valeur exacte de I , puis en donner une valeur approchée au centième près.

Partie C : Application économique

Dans cette partie, on pourra utiliser certains résultats de la partie B.

Une entreprise de sous-traitance fabrique des pièces pour l'industrie automobile. Sa production pour ce type de pièces varie entre 1000 et 5000 pièces par semaines, selon la demande.

On suppose que toutes les pièces produites sont vendues.

Le bénéfice unitaire, en fonction du nombre de pièces produits par semaine, peut être modélisé par la fonction f définie dans la partie B, avec x exprimé en milliers de pièces et $f(x)$ exprimé en euros.

1) Déterminer, au centime près, la valeur moyenne du bénéfice unitaire pour une production hebdomadaire compris entre 1000 et 5000 pièces.

www.takiacademy.com

2) Dans cette question, la réponse sera soigneusement justifiée. Toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Pour quelle(s) production(s), arrondie(s) à l'unité près, obtient-on un bénéfice unitaire égale à $1,05DT$?

www.takiacademy.com

Taki Academy
www.takiacademy.com

Magazines

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance
Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Taki Academy

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kebili / Monastir / Gabes / Djerba
www.takiacademy.com 73.832.000
Magazines

Exercice 1 | 36 min | 6 pt

1/ a)

g est dérivable sur IR et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -1\,e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$$
$$= -e^{-x} + (x-1)e^{-x}$$
$$= (-1+x-1)e^{-x}$$
$$= (x-2)e^{-x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	$1-e^{-2}$	↗	

$$g(2) = 1 - e^{-2}$$

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:43

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique

b) g admet un minimum absolu en 1 de valeur $1-e^{-2} \simeq 0{,}8 > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) > 0$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) + 1$$
$$= e^{-x} - xe^{-x} + 1$$
$$= (1-x)e^{-x} + 1$$
$$= g(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} + x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{-x}+1\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{-x}+1\right) = +\infty$$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$
$$= \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -(-x)e^{-x}$$
$$= 0$$

Donc $D : y = x$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$

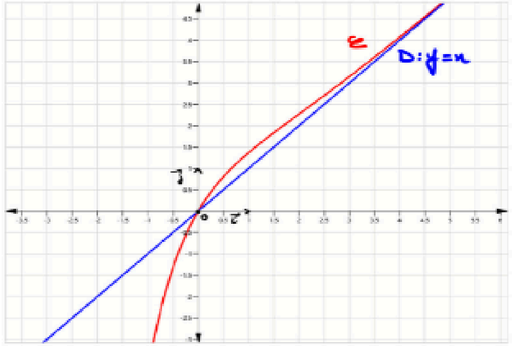
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

d) $f(x) - y = x e^{-x}$: le signe de $f(x)-y$ est celui de x car $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$-$	0	$+$	
Position		$\mathcal{C}$ est au dessous de D	$(0,0)$	$\mathcal{C}$ est au dessus de D	

3/



4/ a) $\int_0^{\alpha} x e^{-x}\,dx$

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longleftarrow v(x) = -e^{-x}$

$$\int_0^{\alpha} x e^{-x}\,dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x}\,dx$$
$$= -\alpha e^{-\alpha} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\alpha}$$
$$= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + e^{0}$$
$$= \boxed{(-1-\alpha)e^{-\alpha} + 1}$$

b) $$\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} |f(x) - x|\,dx = \int_0^{\alpha} f(x) - x\,dx$$
$$= \int_0^{\alpha} x e^{-x}\,dx = \boxed{(-1-\alpha)e^{-\alpha} + 1 \text{ ua}}$$

c) $$\lim_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim_{\alpha \to +\infty} \underbrace{-e^{-\alpha}}_{\to 0} \underbrace{- \alpha e^{-\alpha}}_{\to 0} + 1$$
$$= \boxed{1}$$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

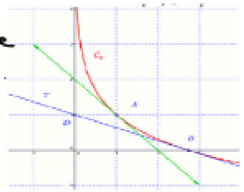
Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Exercice 3 | 42 min | 7 pt

Taki Academy

Partie A :

1°) a°) $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe $(O,\vec{i})$ au point B d'abscisse e



$\Rightarrow$ $g(e)=0$

* $A(1;1)\in \mathcal{C}_g \Rightarrow g(1)=1.$

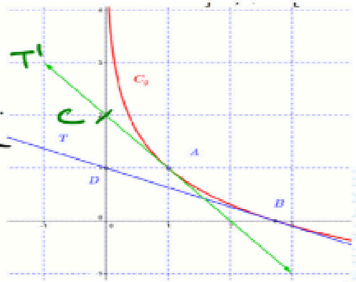
* la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point B(e,0) passe par D(0;1).

$\Rightarrow g'(e)=\frac{y_D-y_B}{x_D-x_B}=\frac{1-0}{0-e}=-\frac{1}{e}$

d'où $g'(e)=-\frac{1}{e}$

Taki Academy

T' la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point A(1,1) passe par le point C(0,2)



$\Rightarrow g'(1)=\frac{2-1}{0-1}=\frac{1}{-1}=-1.$

d'où $g'(1)=-1$

b°) sur $]0;e]$ $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $(x'x)$ donc $g(x)\geq 0$.

sur $[e;+\infty[$ $\mathcal{C}_g$ est au dessous de $(x'x)$ donc $g(x)\leq 0$.

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:43

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

d'où

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$	||	$+$	0	$-$	

2°) $g(x) = a + b\ln x \; ; \; x > 0$.

* $g(1) = 1 \Rightarrow a + b\ln 1 = 1$.

$\Rightarrow a + b \times 0 = 1 \Rightarrow a = 1$.

* $g'(x) = \dfrac{b}{x} \; ; \; x \in \left]0 ; +\infty\right[$.

$g'(1) = -1 \Rightarrow \dfrac{b}{1} = -1 \Rightarrow b = -1$.

d'où $a = 1$ et $b = -1$.

Partie B :

1°) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + \dfrac{\ln x}{x}\right) = 2$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

* $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}\left(2 + \dfrac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

$\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$; $\dfrac{-\infty}{0^+} = -\infty$

d'où $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali — Bac Informatique
Accueil · Mon profil · Offres · Matières · En direct · Porte monnaie · Assistance

2°) a°) $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$; $x > 0$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pour tout $x \in]0;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

d'où $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$; $x > 0$.

b°)

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$2+\frac{1}{e}$	↘	2

* $f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x}$; $f(e) = 2 + \frac{\ln e}{e}$

$\Rightarrow f(e) = 2 + \frac{1}{e}$ car $\ln e = 1$.

c°) * Sur $[e;+\infty[$; $f(x) > 2$.

$\Rightarrow f(x) \neq 0$; pour $x \in [e;+\infty[$.

* Sur $]0;e]$. f est continue et strictement croissante et $f\left(\frac{1}{e}\right) \times f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = (2-e)\left(2-\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = -0{,}84 < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$; admet dans $]0;e]$ une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{e};\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

* $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 + \frac{\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = 2 + e.(-\ln e) = 2 + e(-1) = 2 - e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - e$

Cours · Exercices · Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
62b9d47fcff24_Ma....pdf · 62b9d4e65dbc7_....pdf · 62b9d25ae56ce_M....pdf · 62e1194082e84_M....pdf · 62e1189da6c34_6....pdf · Tout afficher
16:43

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 + \frac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}}}$$

$$= 2 + \sqrt{e}\cdot\left(-\ln(\sqrt{e})\right)$$

$$= 2 + \sqrt{e}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{\sqrt{e}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 - \frac{\sqrt{e}}{2}}$$

Conclusion :

l'équation $f(x)=0$, admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{e};\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$

3°) $\boxed{T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

$$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f(1) = 2 + \frac{\ln 1}{1}$$

$$\Rightarrow f(1) = 2 + 0 = 2 \Rightarrow f(1) = 2.$$

$$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2}$$

$$\Rightarrow f'(1) = \frac{1-0}{1} = 1 \Rightarrow f'(1) = 1.$$

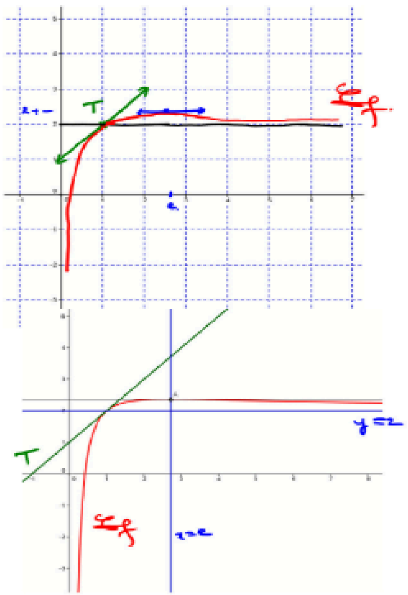
$$T : y = 1\cdot(x-1) + 2$$

$$= x - 1 + 2 = x + 1.$$

d'où $\boxed{T : y = x + 1}$

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

4°)



5°) $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx$

$= \int_1^e \left(2 + \frac{\ln x}{x}\right)dx$

$= \left[2x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$

$= 2e + \frac{1}{2}\ln(e)^2 - \left(2\times 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)$

$= 2e + \frac{1}{2}\times 1 - \left(2 + \frac{1}{2}\times 0\right)$

$= 2e + \frac{1}{2} - 2 = 2e + \frac{1}{2} - \frac{4}{2}$

$= 2e - \frac{3}{2}$

d'où $\mathcal{A} = 2e - \frac{3}{2}$ u.a

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Exercice 1 — 15 min — 3 pt

Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1°) Si *f* est une fonction continue sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ alors $f(x)\geq 0$ pour tout $x\in[a,b]$.

2°) Si *f* et *g* sont deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $a<b$ et $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$ alors *f* et *g* sont

égales sur $[a,b]$.

3°) Pour tout *x* et *t* on a : $\int_0^1 t\,x^2dt = \int_0^1 t\,x^2dx$.

4°) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt = 2\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}dt$.

5°) $\int_{-1}^{1} \frac{x^4 \sin x}{\sqrt{1+x^2}}dt = 0$.

6°) Si *f* est une fonction continue sur IR et périodique de période T alors $\int_0^{2T} f(t)dt = 2\int_0^{T} f(t)dt$.

Exercice 2 — 30 min — 6 pt

Soit *f* la fonction définie sur IR par : $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1°) Etudier les variations de *f* et tracer C_f.

2°) En utilisant la méthode des rectangles et en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en quatre intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

3°) Soit *G* la fonction définie par $G(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Montrer que *G* est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

4°) Soit *H* la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x) = G(\tan x)$.

a) Montrer que $H'(x) = 1$, en déduire $H(x)$ pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer alors que $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{4}$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}dt$.

Taki Academy
www.takiacademy.com
Magazines
73.832.000

Exercice 3 — 25 min — 5 pt

1°) Soit g la fonction définie sur $IR \setminus \{-1\}$ par : $g(x)=\dfrac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels *a*, *b* et *c* tels que : $g(x)=ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2}$.

b) En déduire la primitive F_0 de *g* sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de $f: x \mapsto x\cos 2x$ sur l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$.

b) Soit $\mathcal{C}$ la courbe de *f* dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

Vérifier que pour tout $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $f(x) \geq 0$ puis calculer l'aire de la région limitée par $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4 — 35 min — 6 pt

Soit *f* la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\tan^2 x$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) a) Dresser le tableau de variation de *f* sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2°) Soit (D) le domaine du plan limité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites : $x=0$ et $x=\dfrac{\pi}{4}$.

a) Montrer que l'aire (en unité d'aire) du domaine (D) est : $1-\dfrac{\pi}{4}$.

b) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\,dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx = \dfrac{1}{3}$.

c) En déduire le volume du solide de révolution engendré par la rotation du domaine (D) autour de l'axe des abscisses.

3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq 0$.

Taki Academy www.takiacademy.com

b) Montrer que (U_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_{n+1} + U_n = \dfrac{1}{2n+1}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

www.takiacademy.com

Taki Academy
www.takiacademy.com

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts 0 Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kebili / Monastir / Gabes / Djerba
www.takiacademy.com 73.832.000
Magazines

Exercice 1 | 36 min | 6 pt

Taki Academy

1/ a)

g est dérivable sur IR et $\forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = -1\,e^{-x} + (1-x)(-e^{-x})$$
$$= -e^{-x} + (x-1)e^{-x}$$
$$= (-1+x-1)\,e^{-x}$$
$$= (x-2)\,e^{-x}$$

Le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		↘	$1-e^{-2}$	↗	

$g(2) = 1 - e^{-2}$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:43

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique

b) g admet un minimum absolu en 1 de valeur $1-e^{-2} \simeq 0,8 > 0$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $g(x) > 0$

a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 1e^{-x} + x(-e^{-x}) + 1$$
$$= e^{-x} - xe^{-x} + 1$$
$$= (1-x)e^{-x} + 1$$
$$= g(x)$$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = g(x)$

b) Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x) > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x} + x$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x\,(e^{-x}+1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\,(e^{-x}+1) = +\infty$$

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) - y = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$

$$= \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} -(-x)e^{-x}$$
$$= 0$$

Donc $D : y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $(+\infty)$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf 62e1189da6c34_6....pdf Tout afficher
16:43

Takiacademy | Présentation PowerPoint

app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content

Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf

Chercher cours, examens ou exercices...

1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique

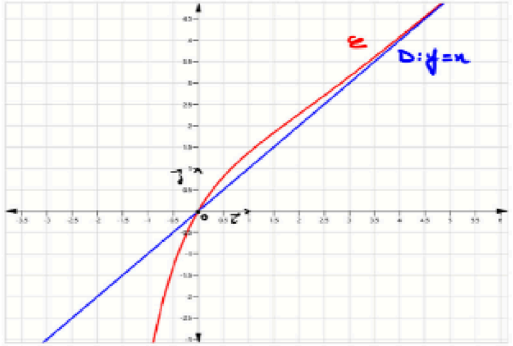
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Taki Academy

d) $f(x) - y = x e^{-x}$: Le signe de $f(x)-y$ est celui de x car $e^{-x} > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
Position	C est au dessous de D	(0,0)	C est au dessus de D

3/



Taki Academy

4/ a) $\int_0^{\alpha} x e^{-x} dx$

$u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = e^{-x} \longleftarrow v(x) = -e^{-x}$

$$\int_0^{\alpha} x e^{-x} dx = \left[-x e^{-x}\right]_0^{\alpha} + \int_0^{\alpha} e^{-x} dx$$

$$= -\alpha e^{-\alpha} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\alpha}$$

$$= -\alpha e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + e^0$$

$$= \boxed{(-1-\alpha) e^{-\alpha} + 1}$$

b) $\mathcal{A}(\alpha) = \int_0^{\alpha} |f(x) - x| dx = \int_0^{\alpha} f(x) - x \, dx$

$$= \int_0^{\alpha} x e^{-x} dx = \boxed{(-1-\alpha) e^{-\alpha} + 1 \text{ ua}}$$

c) $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} \mathcal{A}(\alpha) = \lim\limits_{\alpha \to +\infty} \underbrace{-e^{-\alpha}}_{\to 0} \underbrace{- \alpha e^{-\alpha}}_{\to 0} + 1$

$= \boxed{1}$

Cours | Exercices | Magazines

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher

16:43

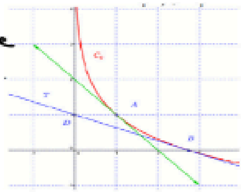
Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Exercice 3 | 42 min | 7 pt

Partie A :

1°) a°) $\mathcal{C}_g$ coupe l'axe $(O,\vec{i})$ au point B d'abscisse e

$\Longrightarrow$ $g(e) = 0$



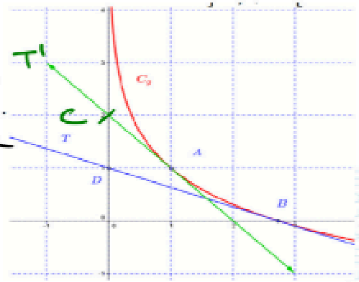
* $A(1;1) \in \mathcal{C}_g \Longrightarrow g(1) = 1.$

* la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point $B(e,0)$ passe par $D(0;1)$.

$$\Longrightarrow g'(e) = \frac{y_D - y_B}{x_D - x_B} = \frac{1-0}{0-e} = -\frac{1}{e}$$

d'où $g'(e) = -\frac{1}{e}$

T' la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point $A(1,1)$ passe par le point $C(0,2)$



$$\Longrightarrow g'(1) = \frac{2-1}{0-1} = \frac{1}{-1} = -1.$$

d'où $g'(1) = -1$

b°) Sur $]0;e]$ $\mathcal{C}_g$ est au dessus de $(x'x)$ donc $g(x) \geq 0$.

Sur $[e;+\infty[$ $\mathcal{C}_g$ est au dessous de $(x'x)$ donc $g(x) \leq 0$.

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance
Cours | Exercices | Magazines

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

d'où

x	0		e		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

2°) $g(x) = a + b\ln x$; $x>0$.

* $g(1) = 1 \Rightarrow a + b\ln 1 = 1$.

$\Rightarrow a + b\times 0 = 1 \Rightarrow a = 1$.

* $g'(x) = \frac{b}{x}$; $x \in]0;+\infty[$.

$g'(1) = -1 \Rightarrow \frac{b}{1} = -1 \Rightarrow b = -1$.

d'où $a = 1$ et $b = -1$.

Partie B :

1°) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(2 + \frac{\ln x}{x}\right) = 2$.

$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

On a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2 \Rightarrow$ la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

* $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(2 + \frac{\ln x}{x}\right) = -\infty$

$\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$; $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

d'où $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$

la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:43

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali — Bac Informatique
Accueil · Mon profil · Offres · Matières · En direct · Porte monnaie · Assistance

2°) a°) $f(x) = 2 + \dfrac{\ln x}{x}$; $x > 0$.

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Pour tout $x \in \,]0;+\infty[$ on a :

$$f'(x) = 0 + \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{\frac{x}{x} - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}.$$

d'où $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$; $x > 0$.

b°)

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$2+\frac{1}{e}$	↘	2

* $f(x) = 2 + \dfrac{\ln x}{x}$; $f(e) = 2 + \dfrac{\ln e}{e}$

$\Rightarrow f(e) = 2 + \dfrac{1}{e}$ car $\ln e = 1$.

c°) * Sur $[e;+\infty[$; $f(x) > 2$.

$\Rightarrow f(x) \neq 0$; pour $x \in [e;+\infty[$.

* Sur $]0;e]$. f est continue et strictement croissante et $f\left(\frac{1}{e}\right) \times f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = (2-e)\left(2-\frac{\sqrt{e}}{2}\right) \simeq -0{,}84 < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$; admet dans $]0;e]$ une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{e};\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$.

* $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 + \dfrac{\ln\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}} = 2 + e.(-\ln e)$

$= 2 + e(-1) = 2 - e \Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - e$.

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali | Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

$*\ f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 + \dfrac{\ln\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{e}}}$

$= 2 + \sqrt{e}\cdot\left(-\ln(\sqrt{e})\right)$

$= 2 + \sqrt{e}\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 2 - \frac{\sqrt{e}}{2}$

Conclusion :

l'équation $f(x)=0$, admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution $\alpha \in \left]\frac{1}{e};\frac{1}{\sqrt{e}}\right[$

3°) $T_a : y = f'(a)(x-a) + f(a)$

$T : y = f'(1)(x-1) + f(1)$

$f(x) = 2 + \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f(1) = 2 + \frac{\ln 1}{1}$

$\Rightarrow f(1) = 2 + 0 = 2 \Rightarrow f(1) = 2.$

$f'(x) = \frac{1-\ln x}{x^2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1-\ln 1}{1^2}$

$\Rightarrow f'(1) = \frac{1-0}{1} = 1 \Rightarrow f'(1) = 1.$

$T : y = 1\cdot(x-1) + 2$

$= x - 1 + 2 = x + 1.$

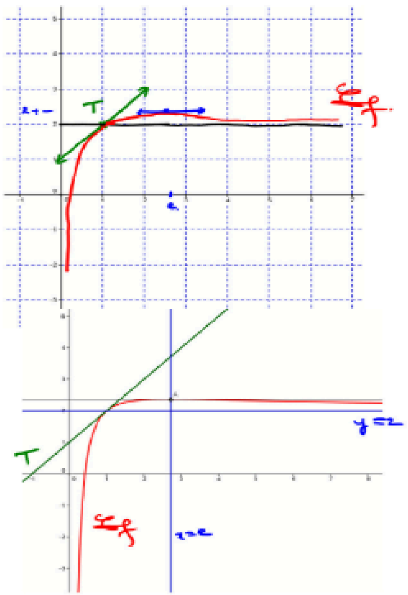
d'ou [sic] $T : y = x + 1$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:43

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/120764-correction-magazine4-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts 0
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

4°)



5°) $\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\,dx = \int_1^e f(x)\,dx$

$= \int_1^e \left(2 + \frac{\ln x}{x}\right)dx$

$= \left[2x + \frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e$

$= 2e + \frac{1}{2}\ln(e)^2 - \left(2\times 1 + \frac{1}{2}(\ln 1)^2\right)$

$= 2e + \frac{1}{2}\times 1 - \left(2 + \frac{1}{2}\times 0\right)$

$= 2e + \frac{1}{2} - 2 = 2e + \frac{1}{2} - \frac{4}{2}$

$= 2e - \frac{3}{2}$

d'ou $\mathcal{A} = 2e - \frac{3}{2}$ ua

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:43

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Magazines

Taki Academy
www.takiacademy.com

Exercice 1 — 10 min — 2,5 pt

1°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$. Déterminer $g^{-1}(1)$.

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\left(g^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

c) En déduire la valeur de $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

2°) Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $0\le I_n\le\frac{1}{n+1}$. Déterminer alors la limite de (I_n).

c) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_{n+2}+I_n=\frac{1}{n+1}$.

3°) a) Vérifier que pour tout réel x, $\frac{x^2}{x^2+1}=1-\frac{1}{x^2+1}$. Calculer alors I_2 et I_4.

b) Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{2x^4+x^2-3}{x^2+1}$. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$.

Exercice 2 — 25 min — 4 pt

On considère les suites (I_n) et définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^1\left(1-t^2\right)^n dt$ et $J_n=\int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt$.

1°) Calculer I_1

2°) a) Montrer que pour tout $0\le t\le 1$ on a : $1-t^2\ge 0$.

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_{n+1}-I_n=-J_n$.

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente.

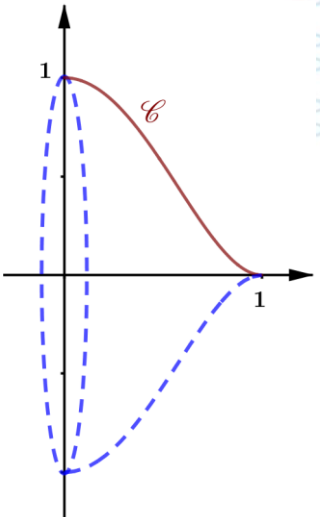
3°) a) Déterminer une primitive de la fonction $t\mapsto t\left(1-t^2\right)^n$.

b) En déduire , à l'aide d'une intégration par partie, que $J_n=\frac{1}{2(n+1)}I_{n+1}$.

c) Montrer alors que pour tout $n\in IN^*$: $I_{n+1}=\frac{2(n+1)}{2n+3}I_n$.

d) La courbe $\mathcal{C}$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f\left(1-t^2\right)=\left(1-t^2\right)^2$

Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendre par la rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe d'abscisses.



Exercice 3 — 35 min — 6 pt

Soit f la fonction définie sur *IR* par : $f(x)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1°) Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.

2°) a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à $\mathcal{C}$ d'abscisse 0.

3°) Dans le graphique de la feuille annexe, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\Delta : y=x$.

La droite Δ coupe $\mathcal{C}$ en un point d'abscisse α.

a) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1}=\dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.

b) En déduire que $\int_0^\alpha f(x)\,dx=\dfrac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

4°) a) Montrer que f réalise une bijection de *IR* sur un intervalle J à préciser.

b) On note f^{-1} la fonction réciproque de *f*.

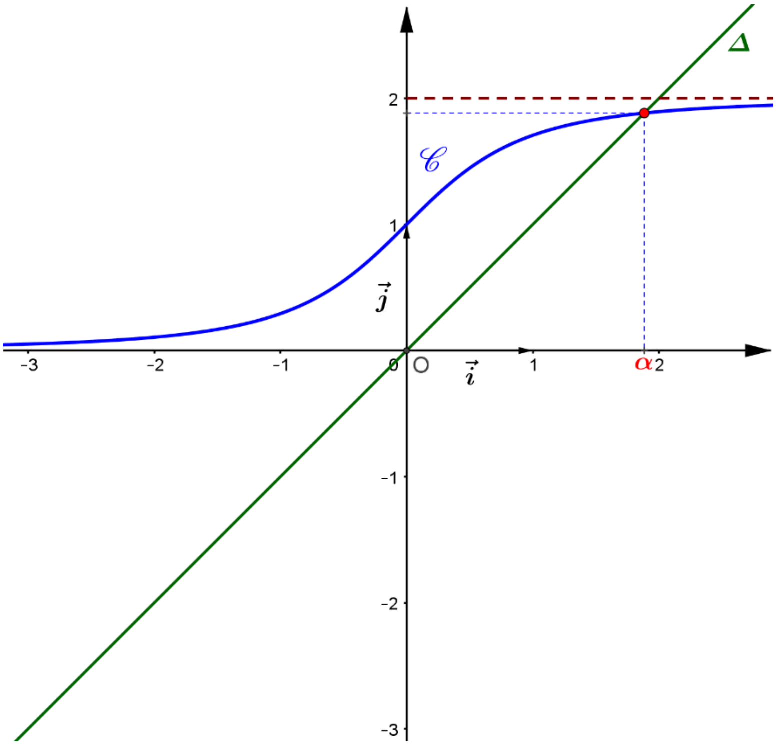
On désigne par $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ dans le même repère.

5°) On pose $I_\alpha=\int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx$.

a) Que représente graphiquement le nombre I_α ?

b) Calculer, I_α en fonction de α.



Taki Academy
www.takiacademy.com

تهنى على قرايتك

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Taki Academy

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kebili / Monastir / Gabes / Djerba

Exercice 1 | 10 min | 2,5 pt

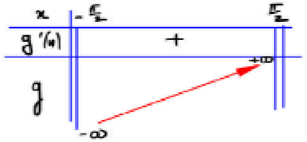
1°) Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $g(x)=\tan(x)$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur ℝ. Déterminer $g^{-1}(1)$.

- $x \longmapsto \tan x$ est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$ en particulier sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

Donc g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

et $\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x)=1+\tan^2 x>0$



- g est **continue et strictement croissante** sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ donc elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $g\left(\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)=\mathbb{R}$.

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:41

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Ainsi g admet une fonction réciproque définie sur $\mathbb{R}$

$g^{-1}(1) = y_0 \Leftrightarrow g(y_0) = 1$
$\Leftrightarrow \tan y_0 = 1$
$\Leftrightarrow y_0 = \frac{\pi}{4}$ car $y_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

AUTREMENT

On a $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1 \Leftrightarrow g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

- g est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$; $g'(x) \neq 0$

Ainsi g^{-1} est dérivable sur $g\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$; $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)}$ avec $y = g^{-1}(x)$
$= \frac{1}{1+\tan^2 y}$ $\Leftrightarrow g(y) = x$ $\Leftrightarrow \tan y = x$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$; $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

c) En déduire la valeur de $I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^1 (g^{-1})'(x)\, dx$
$= \left[g^{-1}(x)\right]_0^1$
$= g^{-1}(1) - g^{-1}(0)$
$= \frac{\pi}{4} - 0$

Ainsi $I = \frac{\pi}{4}$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:41

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

2°) Soit (I_n) la suite définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$.

a) Montrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx-\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$$

$$=\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}dx$$

$\forall x\in[0,1]$; $x^n\geq 0$; $1+x^2>0$ et $x-1\leq 0$

Donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x^2}\leq 0 \quad \forall x\in[0,1]$

et $x\longmapsto \frac{x^n(x-1)}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$

donc $I_{n+1}-I_n\leq 0$

Ainsi (I_n) est décroissante

$\forall x\in[0,1]$; $\frac{x^n}{1+x^2}\geq 0$

et $x\longmapsto\frac{x^n}{1+x^2}$ est continue sur $[0,1]$

donc $\forall x\in[0,1]$; $I_n\geq 0$

(I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$. Déterminer alors la limite de (I_n) .

$\forall x\in[0,1]$; $0\leq x^2\leq 1$

$\Rightarrow 1\leq 1+x^2\leq 2$

$\Rightarrow 0\leq\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^2}\leq 1$ et $x^n\geq 0$

donc $0\leq\frac{x^n}{1+x^2}\leq x^n$

et $x\longmapsto x^n$ et $x\longmapsto\frac{x^n}{1+x^2}$ sont continues sur $[0,1]$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
Tout afficher
16:41

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts 0 Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil · Mon profil · Offres · Matières · En direct · Porte monnaie · Assistance
Cours · Exercices · Magazines

donc $0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$.

$$\Rightarrow \quad 0 \leq I_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

★ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$; **ainsi $\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$**

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

★ $I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

$$= \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,(x^2+1)\,dx.$$

$$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$.

3°) a) Vérifier que pour tout réel x, $\frac{x^2}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$. Calculer alors I_2 et I_4.

★ $1 - \frac{1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1}$

$$= \frac{x^2}{x^2+1}$$

★ $I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x^2+1}\,dx.$

$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

$$= \int_0^1 1\,dx - \int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

$$= 1(1-0) - I$$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:41

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Ainsi $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}$

Pour $n = 2 \Rightarrow I_4 + I_2 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow I_4 = \frac{1}{3} - I_2$

Ainsi $I_4 = -\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}$

b) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^4 + x^2 - 3}{x^2+1}$. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[0,1]$.

$$\bar{f} = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx.$$

$$= \int_0^1 \frac{2x^4 + x^2 - 3}{x^2+1}\,dx.$$

$$= 2\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\,dx - 3\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}\,dx.$$

$$= 2 I_4 + I_2 - 3I$$

$$= 2\left(-\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 - \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{4}$$

$$= -\frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} + 1 - \pi$$

Ainsi $\bar{f} = -\frac{1}{3} - \frac{\pi}{2}$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:41

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Exercice 2 | 25 min | 4 pt

On considère les suites (I_n) et définie sur IN^* par : $I_n=\int_0^1(1-t^2)^n\,dt$ et $J_n=\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$.

1°) Calculer I_1

$$I_1=\int_0^1 1-t^2\,dt=\left[t-\frac{t^3}{3}\right]_0^1$$
$$=1-\frac{1}{3}$$

Ainsi $I_1=\frac{2}{3}$

2°) a) Montrer que pour tout $0\le t\le 1$ on a : $1-t^2\ge 0$.

$$0\le t\le 1 \Rightarrow 0\le t^2\le 1$$
$$\Rightarrow 1-t^2\geq 0$$

b) Montrer que pour tout $n\in IN^*$, $I_{n+1}-I_n=-J_n$.

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1(1-t^2)^{n+1}dt-\int_0^1(1-t^2)^n\,dt$$
$$=\int_0^1(1-t^2)^{n+1}-(1-t^2)^n\,dt$$
$$=\int_0^1(1-t^2)^n(1-t^2-1)\,dt$$
$$=-\int_0^1 t^2(1-t^2)^n\,dt$$

Ainsi $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ I_{n+1}-I_n=-J_n$

c) Montrer que la suite (I_n) est décroissante ; en déduire qu'elle est convergente.

$\forall t\in[0,1]$: $t^2\geq 0$ et $1-t^2\geq 0$

donc $(1-t^2)^n\geq 0$

d'où $t^2(1-t^2)^n\geq 0$

et $t\longmapsto t^2(1-t^2)^n$ est continue sur $[0,1]$

donc $\forall n\in\mathbb{N}^*;\ J_n\geq 0$

$\Rightarrow \forall n\in\mathbb{N}^*\ I_{n+1}-I_n\leq 0$

Ainsi (I_n) est décroissante.

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:41

app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content

★ $\forall t \in [0,1]$; $(1-t^2)^n \geq 0$

et $t \longmapsto (1-t^2)^n$ est continue sur $[0,1]$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $I_n \geq 0$

Ainsi (I_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente

3°) a) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto t(1-t^2)^n$.

$\frac{u^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow u'u^n$

★ $t(1-t^2)^n = -\frac{1}{2} \times (-2t)(1-t^2)^n$

donc $t \longmapsto -\frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de $t \longmapsto t(1-t^2)^n$

b) En déduire, à l'aide d'une intégration par partie, que $J_n = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$.

★ $J_n = \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n \, dt$

$= \int_0^1 t \times t(1-t^2)^n \, dt$

posons : $u(t) = t \longleftrightarrow u'(t) = 1$

$v(t) = -\frac{1}{2}\frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1} \longleftrightarrow v'(t) = t(1-t^2)^n$

$J_n = \left[-\frac{1}{2} t \frac{(1-t^2)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 + \frac{1}{2(n+1)} \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} \, dt$

$= 0 - 0 + \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $J_n = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$

c) Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n$.

★ On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $J_n = \frac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$

et $I_{n+1} - I_n = -J_n \Leftrightarrow J_n = I_n - I_{n+1}$

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Donc $I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$

$\Leftrightarrow I_n = I_{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)} I_{n+1}$

$\Leftrightarrow I_n = I_{n+1}\left(1 + \dfrac{1}{2(n+1)}\right)$

$\Leftrightarrow I_n = \dfrac{2n+3}{2(n+1)} I_{n+1}$

Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+1} = \dfrac{2(n+1)}{2n+3} I_n$

d) La courbe $\mathscr{C}$ ci-contre est la représentation graphique de la fonction f définie sur $[0,1]$ par : $f(1-t^2) = (1-t^2)^2$

Calculer le volume $\mathcal{V}$ du solide de révolution engendre par la rotation de $\mathscr{C}$ autour de l'axe d'abscisses.

★ $V = \pi \int_0^1 f^2(t)\,dt$ (uv)

$= \pi \int_0^1 (1-t^2)^4\,dt$

$= \pi I_4$

or on a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} I_1 = \frac{2}{3} \\ I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{2n+3} I_n \end{cases}$

Donc $I_2 = \dfrac{2(1+1)}{2\times 1+3} I_1$

$= \dfrac{4}{5} \times \dfrac{2}{3}$

Donc $I_2 = \dfrac{8}{15}$

★ $I_3 = \dfrac{2(2+1)}{2\times 2+3} I_2$

$= \dfrac{6}{7} \times \dfrac{8}{15}$

Donc $I_3 = \dfrac{16}{35}$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf 62e1189da6c34_6....pdf Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% Votre solde 0 pts 0 Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance
Cours | Exercices | Magazines

Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

$$I_4 = \frac{2(3+1)}{2\times 3+3} I_3 = \frac{8}{9} \times \frac{16}{35}$$

Donc $I_4 = \frac{128}{315}$

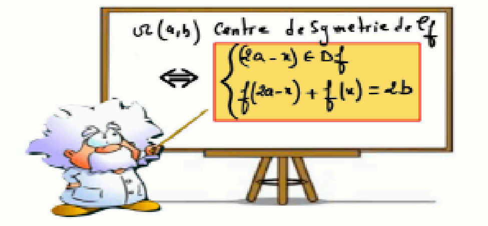
Ainsi: $V = \pi \frac{128}{315}$ (uv)

Exercice 3 | 35 min | 6 pt

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Montrer que $I(0,1)$ est un centre de symétrie pour C.



$a = 0$ et $b = 1$ ⟹ $2a - x = -x$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) + f(x) = 1 + \frac{-x}{\sqrt{(-x)^2+1}} + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$= 2$$

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Ainsi $I(0,1)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$

2°) a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$.

★ f est dérivable sur $\mathbb{R}$

et $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x) = 0 + \dfrac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{x^2+1}$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$

$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

$= \dfrac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

$= \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\sqrt{x^2+1}}$

Ainsi $\forall x\in\mathbb{R}$; $f'(x) = \dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}$

b) Donner une équation cartésienne de la tangente à C_f d'abscisse 0.

★ $T_0 : y = f'(0)\,x + f(0)$

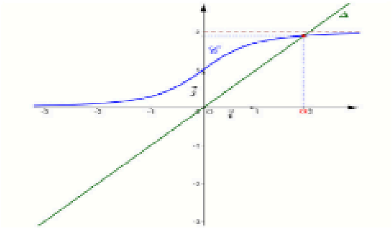
$= 1.x + 1$

Donc $T_0 : y = x + 1$

3°) Dans le graphique ci-dessous, on a représenté la courbe C_f et la droite $\Delta : y = x$.

La droite Δ coupe $\mathscr{C}$ en un point d'abscisse α.

a) Vérifier que $\sqrt{\alpha^2+1} = \dfrac{\alpha}{\alpha-1}$.



★ $f(\alpha) = \alpha \Leftrightarrow 1 + \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \alpha$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+1}} = \alpha - 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sqrt{\alpha^2+1} = \frac{\alpha}{\alpha-1}}$$

b) En déduire que $\int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}$.

$$\int_0^\alpha f(x)\,dx = \int_0^\alpha 1 + \frac{1}{2}\,\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

(avec $u' = 2x$, $u = x^2+1$)

$$\boxed{2\sqrt{u} \longleftrightarrow \frac{u'}{\sqrt{u}}}$$

$$= \left[x + \frac{1}{2}\times\left(2\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^\alpha$$

$$= \left[x + \sqrt{x^2+1}\right]_0^\alpha$$

$$= \left(\alpha + \sqrt{\alpha^2+1}\right) - \left(0 + \sqrt{0^2+1}\right)$$

$$= \alpha - 1 + \sqrt{\alpha^2+1}$$

$$= \alpha - 1 + \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$$= \frac{(\alpha-1)^2+\alpha}{\alpha-1}$$

$$= \frac{\alpha^2-2\alpha+1+\alpha}{\alpha-1}$$

Ainsi $\boxed{\int_0^\alpha f(x)\,dx = \frac{\alpha^2-\alpha+1}{\alpha-1}}$

4°) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur un intervalle J à préciser.

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	2

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

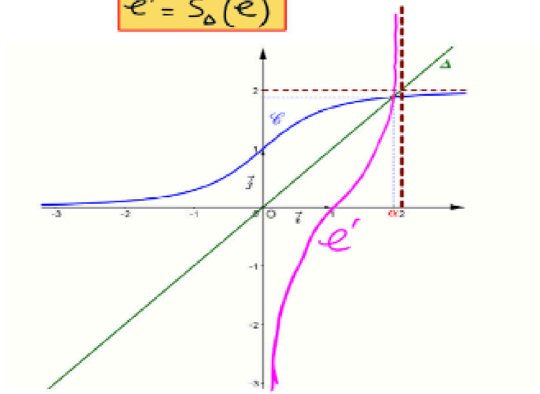
62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf 62e1189da6c34_6....pdf Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

★ f est Continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur
$f(\mathbb{R}) =]0,2[= J$

b) On note f^{-1} la fonction réciproque de f.
On désigne par $\mathscr{C}'$ la courbe représentative de f^{-1} dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ dans le même repère.

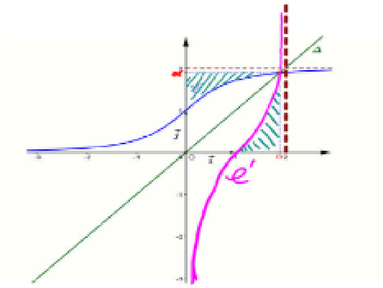
$\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C})$



5°) On pose $I_\alpha = \int_1^\alpha f^{-1}(x)\,dx$.
a) Que représente graphiquement le nombre I_α ?

★ f^{-1} est Continue et positive sur $[1,\alpha]$ donc
$I_\alpha \geq 0$; ainsi I_α est l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}'$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$

b) Calculer I_α en fonction de α.



Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf 62e1189da6c34_6....pdf Tout afficher
16:42

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118948-correction-magazine-ndeg6-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Par éléments de symétrie, on a

$$\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)\,dx = \int_0^{\alpha} \alpha - f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{\alpha} \alpha\,dx - \int_0^{\alpha} f(x)\,dx$$

$$= \alpha(\alpha - 0) - \frac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha - 1}$$

$$= \frac{\alpha^3 - \alpha - \alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha - 1}$$

Ainsi $\displaystyle\int_1^{\alpha} f^{-1}(x)\,dx = \frac{\alpha^3 - \alpha^2 - 1}{\alpha - 1}$

Cours | Exercices | Magazines
Magazine1-(Intégrales)
Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | 62e1189da6c34_6....pdf | Tout afficher
16:42

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Exercice 1 — 30 min — 3 pt

Soit la fonction f définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x+2}{(x+1)^4}$

1. On se propose dans cette question de déterminer des réels a, b, c et d tels que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, on a : $f(x)=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{(x+1)^2}+\dfrac{c}{(x+1)^3}+\dfrac{d}{(x+1)^4}$
   - a) Calculer $\lim\limits_{x\to(-1)^+}(x+1)^4.f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).f(x)$
   - b) En déduire que $d=1$ et $a=0$.
   - c) Vérifier que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, on a : $\dfrac{1-c}{(x+1)^3}=\dfrac{b}{(x+1)^2}$.
   - d) En déduire les valeurs de b et c.
2. Calculer alors $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$

Exercice 2 — 30 min — 4 pt

On considère une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+$ dont le tableau de variation est ci-contre.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘	$\frac{1}{2}$	↗	1

1. Utiliser le tableau de variation pour répondre aux questions suivantes :
   - a) Trouver un encadrement de f sur $\mathbb{R}_+$.
   - b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x}{f(x)-1}$
2. Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0;1]$.
   - a) Montrer que h réalise une bijection de $[0;1]$ sur un intervalle K que l'on précisera.
   - b) Étudier la dérivabilité de h^{-1} sur $\left[\frac{1}{2};1\right]$
3. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
   - a) Dresser le tableau de variation de g.
   - b) Construire $\mathscr{C}$.
4. Soit $I=\displaystyle\int_0^1 g(x)dx$ et $J=\displaystyle\int_0^1 x.g'(x)dx$.
   - a) Donner une interprétation graphique de I.
   - b) Montrer que $1\le I\le 2$.
   - c) Calculer $I+J$.
   - d) En déduire que $0\le J\le 1$

Taki Academy www.takiacademy.com
www.takiacademy.com
Magazines
73.832.000

Exercice 3 — 30 min — 4 pt

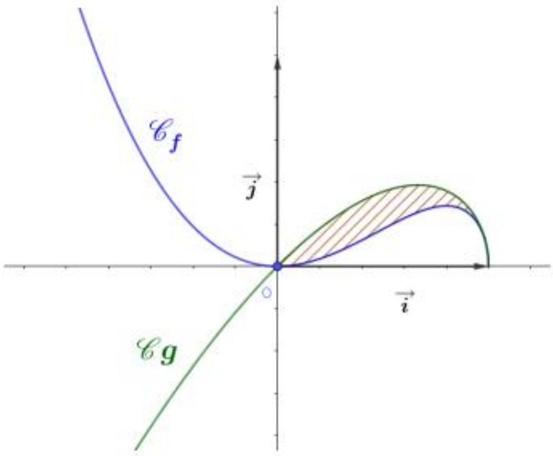
Soit F la fonction définie sur $]-1;1[$ par $F(x)=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]-1;1[$ et calculer $F'(x)$.
2. Soit G la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ par $G(x)=F(\cos(x))-F(\sin(x))$.
   a. Montrer que G est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $G'(x)$.
   b. En déduire $G(x)$ en fonction de x.
   c. Calculer alors $\int_{1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$

Exercice 4 — 30 min — 3 pt

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n=\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$

1. Montrer que $I_0=\frac{2}{3}$.
2. a. En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $(2n+5)I_{n+1}=2(n+1)I_n$.
   b. En déduire la valeur de I_1.
   c. Calculer alors $J=\int_0^1(x+1)^2\sqrt{1-x}dx$
3. Dans la figure ci-dessous, on a représenter dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_f$ des fonctions f et g définies par $f(x)=x^2\sqrt{1-x}$ et $g(x)=x\sqrt{1-x}$.
   Calculer, en unité d'aire, l'aire de la partie hachurée sur le graphique.



Taki Academy
www.takiacademy.com

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ et $\mathscr{C}_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$(unité graphique 2 cm).

1. a) Vérifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
2. a) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α et que $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$
3. a) Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.
   b) Écrire une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
4. a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.
   b) Montrer que f^{-1} est dérivable en 0 et calculer $\left(f^{-1}\right)'(0)$.
   c) Construire (T), $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}'$ la courbe de f^{-1} dans le même repère.
5. a) Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} f(x)dx$.
   b) En déduire $\displaystyle\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} f^{-1}(x)dx$

www.takiacademy.com

Magazines

Taki Academy
www.takiacademy.com

قرايتك على تهنى

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba

www.takiacademy.com 73.832.000

Taki Academy
www.takiacademy.com

Mathématiques

Classe : BAC

Chapitre : Intégrales

Sousse (Khezama - Sahloul) Nabeul / Sfax / Bardo / Menzah El Aouina / Ezzahra / CUN / Bizerte / Gafsa / Kairouan / Medenine / Kébili / Monastir / Gabes / Djerba
www.takiacademy.com 73.832.000
Magazines

Exercice 1 | 30 min | 3 pt

1) a)

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 \cdot f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} x+2 = -1+2 = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)}{(x+1)^3}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2} = 0$$

b) $\cdot \lim_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 f(x)$

$$= \lim_{x\to(-1)^+} a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1)\,d = d$$

& $\lim_{x\to(-1)^+}(x+1)^4 \cdot f(x) = 1$. D'où $\boxed{d=1}$

$\cdot \lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot f(x) = \lim_{x\to+\infty} a + \underbrace{\frac{b}{(x+1)}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{c}{(x+1)^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{d}{(x+1)^3}}_{\to 0} = a$

& $\lim_{x\to+\infty}(x+1)\cdot f(x) = 0$. D'où $\boxed{a=0}$

c) On a $f(x) = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$

$$\iff \frac{x+2}{(x+1)^4} = \frac{b}{(x+1)^2} + \frac{c}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf | 62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | Tout afficher
16:44

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

$$\Longleftrightarrow \frac{x+2}{(x+1)^4} - \frac{c}{(x+1)^3} - \frac{1}{(x+1)^4} = \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{(x+1)}{(x+1)^4} - \frac{c}{(x+1)^3} = \frac{b}{(x+1)^2}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1-c}{(x+1)^3} = \frac{b}{(x+1)^2}$$

d) On a $\forall x \in]-1,+\infty[$

$$\frac{b}{(x+1)^2} = \frac{1-c}{(x+1)^3} \Longleftrightarrow \frac{b(x+1)}{(x+1)^3} = \frac{1-c}{(x+1)^3}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{bx+b}{(x+1)^3} = \frac{1-c}{(x+1)^3} \Longleftrightarrow \begin{cases} 1-c=b \\ b=0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=0 \end{cases}$$

D'où $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}$

2) $I = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x+1)^4}\right) dx$

$$= \left[-\frac{1}{2(x+1)^2} - \frac{1}{3(x+1)^3}\right]_0^1 = -\frac{4}{24} + \frac{5}{6} = -\frac{4}{24} + \frac{20}{24} = \frac{2}{3}$$

Exercice 2 | 30 min | 4 pt

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1.$$

b) $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{f(x)-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{f(x)-1}{x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

car $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'_d(0)$ et $f'(x)<0$

2) a) h est continue strictement décroissante sur $[0,1]$ elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ sur $h([0,1]) = [h(1), h(0)] = [\frac{1}{2}, 1]$

b) h est dérivable sur $[0,1]$

De plus $h'(x)=0 \Longleftrightarrow x=0$ ou $x=1$

On a $h(0)=1$ et $h(1)=\frac{1}{2}$

Donc h est dérivable sur $[\frac{1}{2},1] \setminus \{\frac{1}{2},1\} =]\frac{1}{2},1[$

3) a) On a f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$ $f(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+$ on a

$$g'(x) = -\frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

- $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

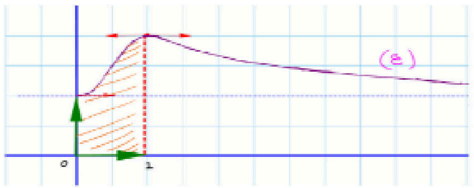
0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf | 62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | Tout afficher
16:44

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

- $\lim_{x \to 0^+} g(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$		$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

b)



A) a) g est continue positive sur $[0, 1]$ donc I représente l'aire en unité d'aire de la partie du plan limitée par $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

b) On a $\forall x \in [0, 1]$ $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{f(x)} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq g(x) \leq 2$

les trois fonctions sont continues sur $[0, 1]$ donc

$$\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 g(x)\,dx \leq \int_0^1 2\,dx$$

$$1 \leq I \leq 2$$

$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$

D'où $1 \leq I \leq 2$

c) $I + J = \int_0^1 g(x)\,dx + \int_0^1 x\,g'(x)\,dx$

$= \int_0^1 g(x) + x\,g'(x)\,dx$

$= \int_0^1 (x)' \cdot g(x) + x \cdot g'(x)\,dx$

$= [x\,g(x)]_0^1 = g(1) = \frac{1}{f(1)} = 2$

D'où $I + J = 2$

d) On a $1 \leq I \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 - J \leq 2$

$\Leftrightarrow -1 \leq -J \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq J \leq 1$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)
0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf 62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf
Tout afficher
16:44

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

Exercice 3 | 30 min | 4 pt

Taki Academy www.takiacademy.com

Rappels f est une fonction continue sur I et $a \in I$.
La fonction F définie sur I par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I et on a $F'(x)=f(x)$

1) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur $]-1,1[$
car $t \mapsto 1-t^2$ est continue et strictement positive sur $]-1,1[$ et on a $\frac{\sqrt{2}}{2} \in]-1,1[$ donc F est dérivable sur $]-1,1[$
$\forall x \in]-1,1[$ $\quad F'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) a) On pose $u(x)=\cos(x)$ et $v(x)=\sin(x)$
u est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a
$u'(x)=-\sin(x)<0$
Donc $u(]0,\frac{\pi}{2}[)=]u(\frac{\pi}{2}),u(0)[=]0,1[$
v est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a
$v'(x)=\cos(x)>0$
Donc $v(]0,\frac{\pi}{2}[)=]0,1[\subset]-1,1[$
Donc F est dérivable sur $v(]0,\frac{\pi}{2}[)$ donc $F\circ v$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$
D'ou $G=F\circ u-F\circ v$ est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ on a :
$G'(x)=u'(x).F'(u(x))-v'(x).F'(v(x))$
$=-\sin(x).\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(x)}}-\cos(x).\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}}$
$=-\sin(x).\frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}-\cos(x).\frac{1}{\sqrt{\cos^2(x)}}$
$\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ $\sin(x)>0$ et $\cos(x)>0$
$=-\sin(x).\frac{1}{\sin(x)}-\cos(x).\frac{1}{\cos(x)}$
$=-1-1=-2$
Ainsi $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$ $\quad G'(x)=-2$

b) on a $G'(x)=-2$ $\forall x \in]0,\frac{\pi}{2}[$
donc $G(x)=-2x+C$
or $G(x)=F(\cos(x))-F(\sin(x))$
alors $G(\frac{\pi}{4})=F(\cos(\frac{\pi}{4}))-F(\sin(\frac{\pi}{4}))$
$=F(\frac{\sqrt{2}}{2})-F(\frac{\sqrt{2}}{2})=0$
Donc $G(\frac{\pi}{4})=0 \Leftrightarrow -2\times\frac{\pi}{4}+C=0 \Leftrightarrow C=\frac{\pi}{2}$

D'où $G(x)=-2x+\frac{\pi}{2}$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf | 62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | Tout afficher
16:44

app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content

c) $\displaystyle\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$\displaystyle = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$\displaystyle = -\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

$= F\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - F\left(\frac{1}{2}\right) = F\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) - F\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

$= G\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2 \times \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$

$= -\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$

$= \frac{\pi}{6}$

D'où $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{\pi}{6}$

Exercice 4 30 min 3 pt

1) $\displaystyle I_0 = \int_0^1 x^0 \sqrt{1-x}\,dx$

$\displaystyle = \int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx$

$\displaystyle = -\int_0^1 (-1)\cdot\sqrt{1-x}\,dx$

$\displaystyle = -\int_0^1 u'(x)\sqrt{u(x)}\,dx$ avec $u(x) = 1-x$

$= -\left[\frac{2}{3}\, u(x)\cdot\sqrt{u(x)}\right]_0^1$

$= -\left[\frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1$

$= -\left(-\frac{2}{3}\cdot 1\cdot 1\right) = \frac{2}{3}$

2) a) $\displaystyle I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx$

$\displaystyle = -\int_0^1 x^{n+1}\cdot\left(-\sqrt{1-x}\right)dx$

On pose $u(x) = x^{n+1} \longrightarrow u'(x) = (n+1)x^n$

$v'(x) = -\sqrt{1-x} \longrightarrow v(x) = \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

$\displaystyle I_{n+1} = -\left[\frac{2}{3}x^{n+1}(1-x)\sqrt{1-x}\right]_0^1 + \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 x^n(1-x)\sqrt{1-x}\,dx$ (le crochet $= 0$)

$\displaystyle \Longleftrightarrow I_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3}\int_0^1 (x^n - x^{n+1})\sqrt{1-x}\,dx$

$\displaystyle \Longleftrightarrow 3I_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x} - x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance
Taki Academy www.takiacademy.com

$\Longleftrightarrow 3I_{n+1} = 2(n+1)\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx - 2(n+1)\int_0^1 x^{n+1}\sqrt{1-x}\,dx$

$\Longleftrightarrow 3I_{n+1} = 2(n+1)I_n - 2(n+1)I_{n+1}$

$\Longleftrightarrow 3I_{n+1} + 2(n+1)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$

$\Longleftrightarrow \boxed{(2n+5)I_{n+1} = 2(n+1)I_n}$

b) On a $(2n+5)I_{n+1} = 2(n+1)I_n$

Donc $(2\times 0+5)I_1 = 2(0+1)I_0$

$\Longleftrightarrow 5I_1 = 2I_0 \Longleftrightarrow I_1 = \frac{2}{5}I_0$

$\Longleftrightarrow I_1 = \frac{2}{5}\times\frac{2}{3} \Longleftrightarrow \boxed{I_1 = \frac{4}{15}}$

c) $J = \int_0^1 (x+1)^2\sqrt{1-x}\,dx$

$= -\int_0^1 (x+1)^2\cdot(-\sqrt{1-x})\,dx$

On pose $u(x) = (x+1)^2 \longrightarrow u'(x) = 2(x+1)$

$v'(x) = -\sqrt{1-x} \longrightarrow v(x) = \frac{2}{3}(1-x)\sqrt{1-x}$

Donc $J = \left[\frac{2}{3}(1-x)(x+1)^2\sqrt{1-x}\right]_0^1 - \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x)(1+x)\sqrt{1-x}\,dx$

$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\int_0^1 (1-x^2)\sqrt{1-x}\,dx$

$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\int_0^1 \sqrt{1-x}\,dx + \frac{4}{3}\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

$= \frac{2}{3} - \frac{4}{3}I_0 + \frac{4}{3}I_2$

Taki Academy www.takiacademy.com

On a $(2\times 1+5)I_2 = 2(1+1)I_1$

$\Longleftrightarrow 7I_2 = 4I_1 \Longleftrightarrow I_2 = \frac{4}{7}I_1$

$\Longleftrightarrow I_2 = \frac{4}{7}\times\frac{4}{15} \Longleftrightarrow I_2 = \frac{16}{105}$

Ainsi $J = \frac{2}{3} - \frac{4}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\cdot\frac{16}{105}$

$= \frac{2}{3} - \frac{8}{9} + \frac{4}{315} = -\frac{22}{105}$

D'où $\boxed{J = -\frac{22}{105}}$

3) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,dx$

$= \int_0^1 g(x) - f(x)\,dx$

$= \int_0^1 x\sqrt{1-x} - x^2\sqrt{1-x}\,dx$

$= \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,dx - \int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

$= I_1 - I_2$

$= \frac{4}{15} - \frac{16}{105} = \frac{4}{35}$

D'où $\boxed{\mathcal{A} = \frac{4}{35}\ u.a}$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf | 62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | Tout afficher
16:45

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

Exercice 5 | 40 min | 6 pt

Taki Academy

1) a) $x \longmapsto x^2 - 2x + 2$ est définie et strictement positive sur $\mathbb{R}$

($\Delta < 0$ et $a = 1 > 0$)

Donc $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$ et par suite

$x \longmapsto \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$ est définie sur $\mathbb{R}$

D'où $D_f = \mathbb{R}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-1}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}}$

$= \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1-\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1$

$\Rightarrow$ la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

2) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x+2} - (x-1)\times\frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-2x+2} - \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{(x^2-2x+2)}$$

$$= \frac{(x^2-2x+2)-(x^2-2x+1)}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$= \frac{x^2-2x+2-x^2+2x-1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}}$$

$$= \frac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}} > 0$$

Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) On pose $h(x) = f(x) - x$

h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a

$h'(x) = f'(x) - 1 < 0$

car $\dfrac{1}{(x^2-2x+2)\sqrt{x^2-2x+2}} < 1$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf 62b9d47fcff24_Ma....pdf 62b9d4e65dbc7_....pdf 62b9d25ae56ce_M....pdf 62e1194082e84_M....pdf Tout afficher
16:45

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Chercher cours, examens ou exercices...
Votre solde 0 pts
Salsabil Maali
Bac Informatique
Accueil
Mon profil
Offres
Matières
En direct
Porte monnaie
Assistance

h est continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R})$.

$h(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \to +\infty} h(x), \lim_{x \to -\infty} h(x) \right[$

- $\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

- $\lim_{x \to -\infty} h(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) - x$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x - 1}{|x|\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}} - x$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1 - \frac{2}{x} + \dots}} - x = +\infty \quad (\to -1)$$

Donc $h(\mathbb{R}) =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α.

$h(\alpha) = 0 \iff f(\alpha) - \alpha = 0 \iff$ $\boxed{f(\alpha) = \alpha}$

On a $h(-1) = \frac{-2}{\sqrt{5}} + 1 > 0$

$h\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{6}{2\sqrt{13}} + \frac{1}{2} > 0$

Comme $h(-1) \cdot h\left(-\frac{1}{2}\right) < 0$ donc

$\boxed{-\frac{1}{2} < \alpha < -1}$

3) On a $D_f = \mathbb{R}$

$$f(1-x) + f(1+x) = \frac{1 - x - 1}{\sqrt{(1-x)^2 - 2(1-x) + 2}} + \frac{1 + x - 1}{\sqrt{(1+x)^2 - 2(1+x) + 2}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1 - 2x + x^2 - 2 + 2x + 2}} + \frac{x}{\sqrt{1 + 2x + x^2 - 2 - 2x + 2}}$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= 0 = 2 \times 0$$

Ainsi le point $I(1, 0)$ est un centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.

b) $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

& $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$

Donc $\boxed{T : y = x - 1}$

4) a) f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

$f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right[=]-1, 1[$.

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

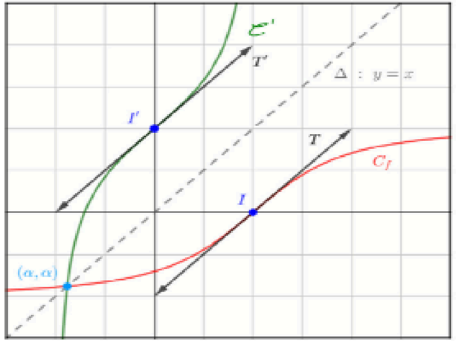
0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf | 62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf
Tout afficher
16:45

Takiacademy | Présentation PowerPoint
app.takiacademy.com/subjects/1-maths/chapters/14-chapitre-12-calcul-integral/lessons/118942-correction-magazine-ndeg3-integrales/content
Téléchargement ter... | dev c++ - Recherch... | Le groupe Slama in... | Présentation20.ppt... | Les bases de donné... | Dell G15 GTX 1650... | Une introduction à... | exos_corriges.pdf
Chercher cours, examens ou exercices...
1% | Votre solde 0 pts | 0 | Salsabil Maali Bac Informatique
Accueil | Mon profil | Offres | Matières | En direct | Porte monnaie | Assistance

b) On a f est dérivable en 1 et $f'(1) = 1 \neq 0$ donc f^{-1} est dérivable en $f(1) = 0$ et on a

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{1} = 1.$$

c) $\mathscr{C}' = S_\Delta(\mathscr{C}_f)$ avec $\Delta : y = x$



5) a) $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)\,dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$

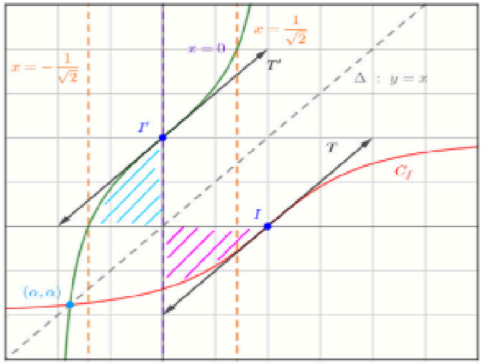
$$= \frac{1}{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[2\sqrt{x^2-2x+2}\right]_0^{1/\sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\sqrt{2}} + 2} - \sqrt{2}$$

$$= \frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}$$

d)



On remarque que $\displaystyle\int_0^{1/\sqrt{2}} f(x)\,dx = -\int_{-1/\sqrt{2}}^{0} f^{-1}(x)\,dx$

D'où $\displaystyle\int_{-1/\sqrt{2}}^{0} f^{-1}(x)\,dx = \sqrt{2} - \frac{\sqrt{5-2\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$

Correction-Magazine1-(Intégrales)
Magazine2-(Intégrales)
Correction-Magazine2-(Intégrales)
Magazine3-(Intégrales)
Correction-Magazine3-(Intégrales)
Magazine4-(Intégrales)
Correction-Magazine4-(Intégrales)
Magazine5-(Intégrales)
Correction-Magazine5-(Intégrales)
Magazine N°6- (Intégrales)
Correction Magazine N°6- (Intégrales)

0 interactions
62b9d3279b14f_M....pdf | 62b9d47fcff24_Ma....pdf | 62b9d4e65dbc7_....pdf | 62b9d25ae56ce_M....pdf | 62e1194082e84_M....pdf | Tout afficher
16:45

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Définition de l'integrale d'une fonction continue

Définition :

Soit f une fonction Continue sur un intervalle I et Soit F une primitive de f sur I. pour tous réels a et b de I, le réel $F(b)-F(a)$ est indépendant du choix de la primitive F.

on L'appelle intégrale de f de a à b

et on le note : $\int_a^b f(x)\,dx$ ou $[F(x)]_a^b$

d'où : $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

Exemple :

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t\,dt$ et $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 1+tg^2(t)\,dt$.

Rep :

$\int_0^{\pi/2} \sin(t)\,dt = [-\cos t]_0^{\pi/2}$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0))$

$= 1$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+tg^2(t))\,dt = [tg(t)]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg(0)$$

$$= 1 - 0$$

$$= \boxed{1}.$$

Remarque :

- Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, la lettre x peut être remplacée par t ou une autre lettre quelconque.

- on aura : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

- La fonction φ définie sur l'intervalle I par : $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

est telle que : $\varphi'(x) = f(x)$ et $\varphi(a) = 0$

donc φ est la primitive de f sur I qui s'annule en a.

TakiAcademy
www.takiacademy.com
Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Conséquences :

- $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$.
- $\int_a^b 0\,dx = [c]_a^b = c - c = 0$ avec $(c \in \mathbb{R})$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ (règle d'inversion des bornes)

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Propriétés de l'integrale

Relation de chasles :

Si f est continue sur un intervalle I

Alors pour tous réel a, b, c de I on a :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Linéarité de l'intégrale :

Si f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

$\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$.

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

où α et β sont deux constantes indépendante de x

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Exemple : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \sin x & \text{si } \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Calculer $\int_0^{\pi/2} f(x)\,dx$.

Rep :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

$$= [\sin x]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \boxed{\sqrt{2}}.$$

Exemple : Calculer $I = \int_0^{\pi} (2\sin t + \cos t + 3)\,dt$

Rep :

$$\int_0^{\pi} (2\sin t + \cos t + 3)\,dt = 2\int_0^{\pi} \sin t\,dt + \int_0^{\pi} \cos t\,dt + \int_0^{\pi} 3\,dt$$

$$= 2[-\cos t]_0^{\pi} + [\sin t]_0^{\pi} + 3[t]_0^{\pi}$$

$$= \boxed{3 + \pi}$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Ordre et Integration

Si a et b deux réels telque $a \leq b$ et f une fonction Continue et positive sur un intervalle $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

Démonstration : Soit F une primitive de f puisque $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [a,b]$ et que $F'(x) = f(x) \geq 0$.

donc F est croissante sur $[a,b]$ d'où :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \geq 0 .$$

Si a et b deux réels telque $a \leq b$ f et g deux fonctions Continues et $\forall x \in [a,b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

Si a et b deux réels telsque $a \leq b$ f est une fonction Continue

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Sur $[a,b]$ alors :

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx .$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

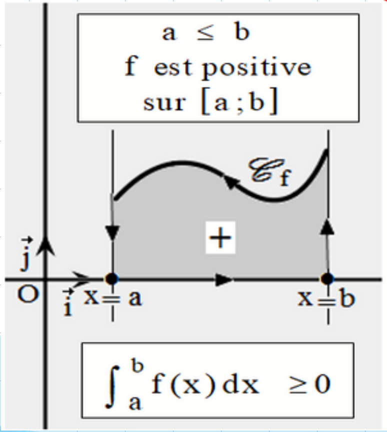
Interprétation Graphique

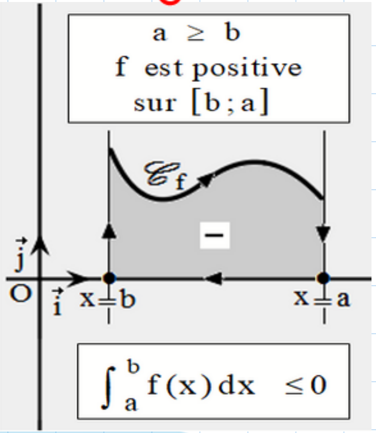
$\mathscr{C}_f$: est la courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f continue sur un intervalle I.
a et b deux réels de I.

D est le domaine du plan limité par $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives : $x = a$ et $x = b$

$\int_a^b f(x)\,dx$: est l'aire algébrique du domaine D.

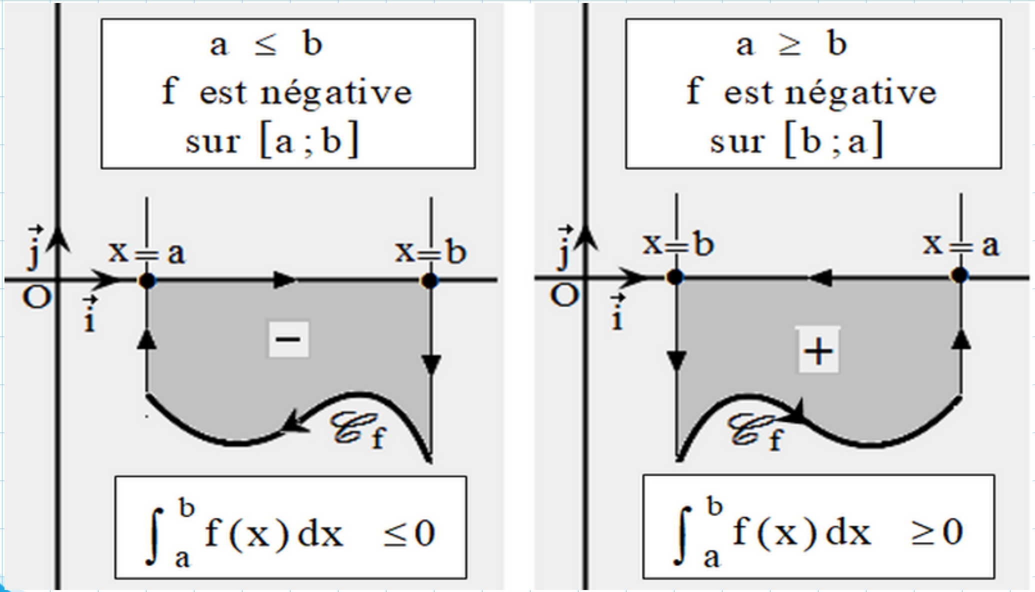
Cas où la fonction f garde signe constant





Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

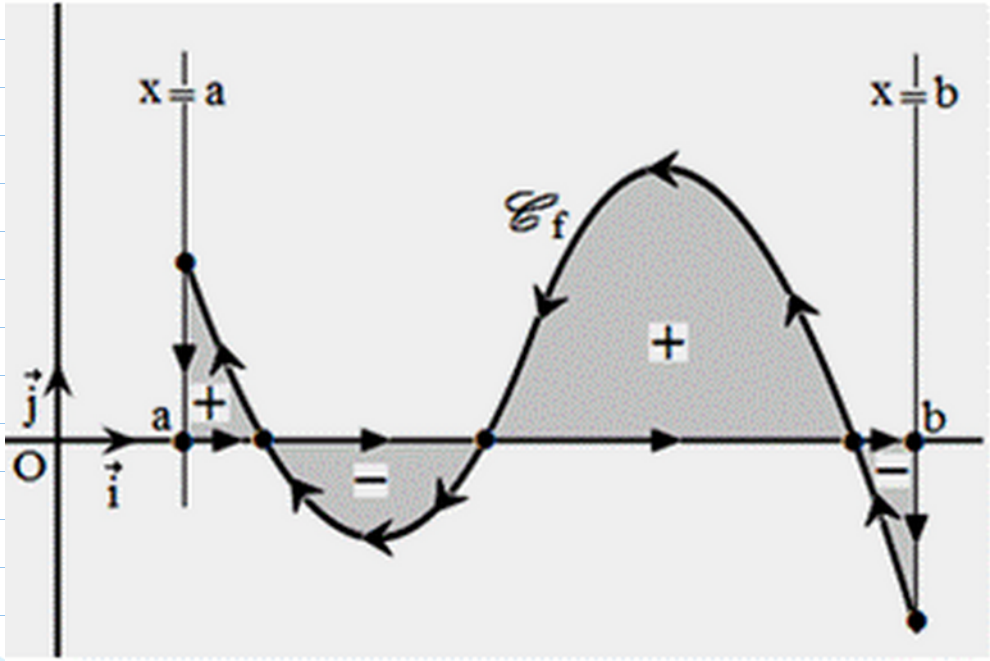


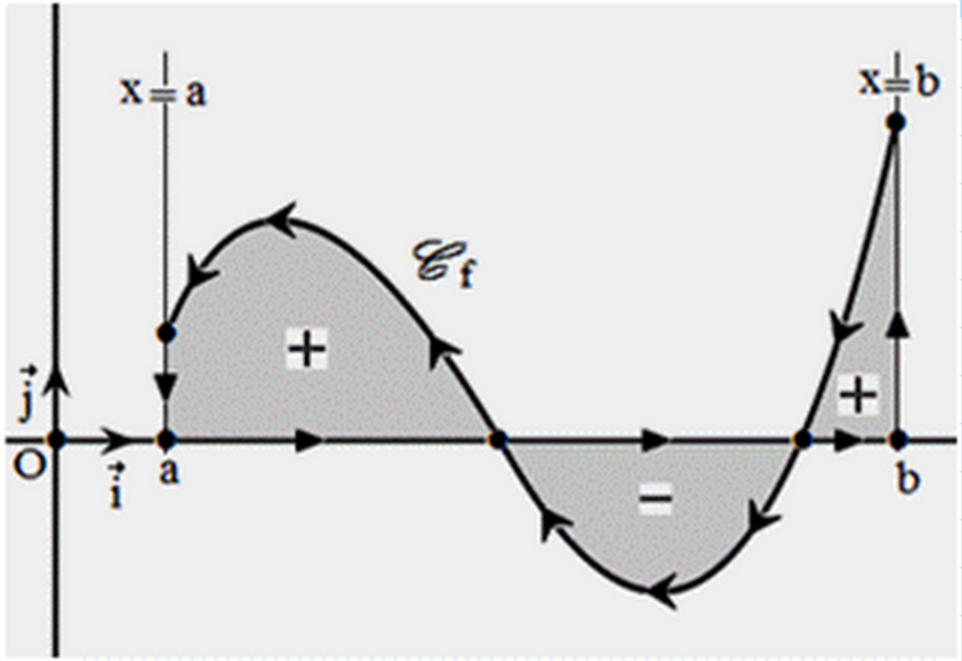
Cas où la fonction f change de signe

le nombre $\int_a^b f(x)\,dx$ est la somme de termes de signes variables. Comme c'est indiqué dans la figure ci-dessous :

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com





Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Moyenne d'une fonction

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ où $a<b$. On appelle moyenne de f sur $[a,b]$, le réel noté $\overline{f}_{[a,b]}$ et défini par :

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

exemple : Déterminer la valeur moyenne sur $[0,\pi]$ de la fonction $f : t \mapsto \sin t$

Rep : par définition on a :

$$\overline{f} = \frac{1}{\pi-0}\int_0^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin t\,dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\cos t\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\cos(\pi)+\cos(0)\right)$$

$$= \frac{1}{\pi}\times 2 = \frac{2}{\pi}$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Théorème de la moyenne :

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ où $a<b$, alors il existe c appartenant à $[a,b]$ tq $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$.

Démonstration :

La fonction f est continue sur $[a,b]$

on déduit des valeurs intermédiaires que

$$f([a,b]) = [m,M]$$

avec $m = \min f$ et $M = \max f$

Comme $m \leq \overline{f} \leq M$

donc il existe $c \in [a,b]$ telque :

$$\overline{f} = f(c)$$

Inégalité de la moyenne :

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$

Soient m son minimum et M son maximum sur $[a,b]$ alors :

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

$$m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leqslant M$$

Démonstration :

de la double inégalité $m \leqslant f(t) \leqslant M$,

on déduit que :

$$\int_a^b m\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b M\,dt .$$

$$\Leftrightarrow (b-a)\,m \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant (b-a)\,M$$

Ainsi $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant M$

Exemple :

Montrer que $\frac{9}{9+4\pi^2} \leqslant \frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \frac{4}{4+\pi^2}$

Rep : posons $f : \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$$

il est clair que f est décroissante

sur $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$, on a donc :

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right) \; ; \forall x \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}\right]$

en appliquant l'inégalité de la moyenne

on obtient :

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) \leqslant \frac{1}{\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{9+4\pi^2} \leqslant \frac{6}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{dx}{1+x^2} \leqslant \frac{4}{4+\pi^2}$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

Méthodes d'Integration

Explicité une primitive :

c'est la méthode qui consiste à déterminer une primitive F de la fonction f qu'on cherche à integrer. une telle Méthode utilise la définition :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

on se refaire au Tableau des primitives usuelles et aux formules de dérivation pour expliciter la primitive F.

exemple : Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$

Rep :

La fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$ est la dérivée de la fonction $x \mapsto tg(x)$. on a alors :

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[tg\, x \right]_0^{\pi/4} = tg\left(\frac{\pi}{4}\right) - tg(0)$$

$$= 1$$

exemple :

$$I = \int_{-2}^{0} (3x^2 + 2x - 4)\, dx$$

$$J = \int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, dx .$$

Rep :

$$I = \int_{-2}^{0} (3x^2 + 2x - 4)\, dx$$

$$= \left[x^3 + x^2 - 4x \right]_{-2}^{0}$$

$$= -4 .$$

$$J = \int_0^2 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\, dx = \left[\frac{-1}{x^2+1} \right]_0^2 = \frac{4}{5}$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Exemple : Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^5}\,dx$.

Rep :

La fonction $x \longmapsto \frac{x^2}{(1+x^3)^5}$ est presque de la forme $\frac{u'}{u^5}$.

avec $u(x) = 1+x^3$

en écrivant $\frac{x^2}{(1+x^3)^5} = \frac{1}{3}\,\frac{3x^2}{(1+x^3)^5}$ il vient :

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x^3)^5}\,dx = \frac{1}{3}\int_0^1 \frac{3x^2}{(1+x^3)^5}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[\frac{-1}{4(1+x^3)^4}\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{5}{64}}$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
☎ 23390248 - 29862815

Méthodes d'Integration

Décomposition en élément simple :

Dans d'autre cas on se ramène à décomposer la fonction f en une combinaison linéaire de fonctions élémentaires qui figurent dans le tableau des primitives usuelles. c'est à dire qu'on écrit f sous forme suivante :

$$f = \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + \dots + \alpha_n g_n$$

où les α_i sont des constantes réelles et les g_i sont des fonctions dont on connait les primitives G_i .

Dans ce cas : $F = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \dots + \alpha_n G_n$ est une primitive de f .

Exemples :

$$A = \int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 - 3}{x^2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{x^3}{x^2} + 2\frac{x^2}{x^2} - \frac{3}{x^2}\right)dx$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

$$= \int_1^2 \left(x + 2 - \frac{3}{x^2}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x + \frac{3}{x}\right]_1^2 = \boxed{2}$$

$$B = \int_0^1 \frac{(2t-1)(t^2+1)^2 + 2t}{(t^2+1)^2}\, dt = \int_0^1 \left((2t-1) + \frac{2t}{(t^2+1)^2}\right) dt$$

$$= \left[t^2 - t - \frac{1}{t^2+1}\right]_1^2$$

$$= \boxed{\frac{33}{10}}$$

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Méthodes d'Integration

Intégration par parties:

Cette méthode est basée sur la règle de dérivation du produit de deux fonctions dérivables : $(f \cdot g)' = f'g + g'f$.

Théorème :

Si $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions dérivables et si leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a,b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\, g'(t)\, dt = \left[f(t)\, g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\, g(t)\, dt$$

Exemples :

$$A = \int_0^{\pi/2} x \cos x \, dx$$

on pose $u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \cos x \longrightarrow v(x) = \sin x$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

(on a u, v, u', v' sont continues sur $[0, \frac{\pi}{2}]$)

d'après la formule d'intégration par parties

on a :

$$A = \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= \left[x \sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \boxed{\frac{\pi}{2} - 1}$$

$$B = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} \, dx$$

on pose : $u(x) = x \longrightarrow u'(x) = 1$

$v'(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}} \longrightarrow v(x) = 2\sqrt{x+1}$

(u, v, u', v' sont continues sur $[0,1]$)

Par suite :

$$B = \left[2x\sqrt{x+1} \right]_0^1 - \int_0^1 2\sqrt{x+1} \, dx$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

$$= 2\sqrt{2} - \left[\frac{4}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{4-2\sqrt{2}}{3}}$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

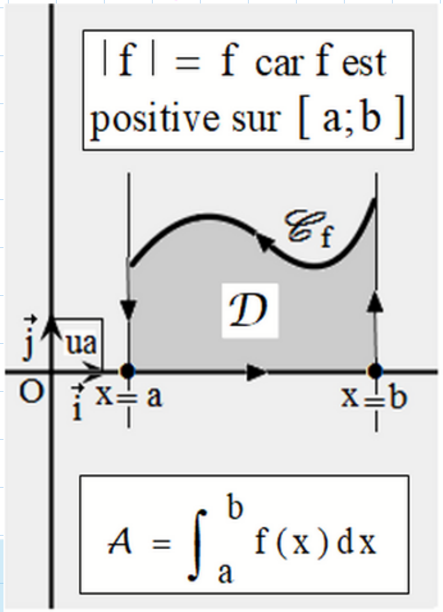
TakiAcademy
www.takiacademy.com

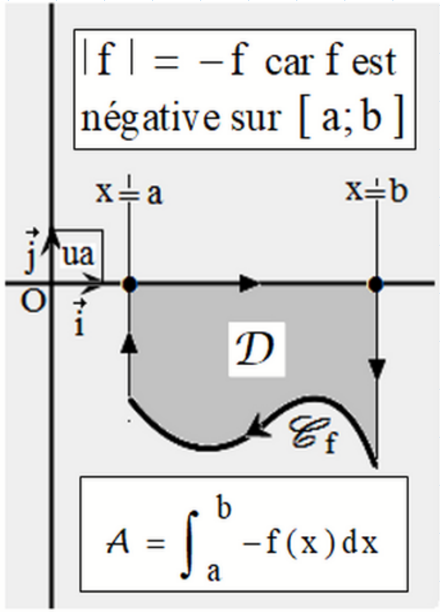
Calcul D'Aires

f et g sont deux fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ où $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ désigne leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$ où l'unité d'aire est :

$$u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

L'aire du domaine D du plan limité par la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites $x=a$ et $x=b$ est $\mathcal{A} = \int_a^b |f(x)|\,dx$



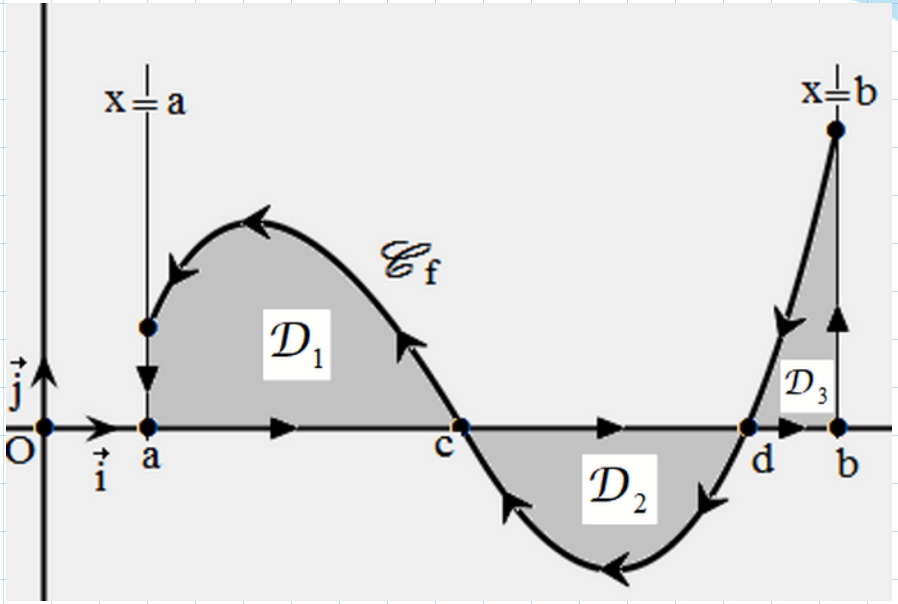


Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

Calcule de l'aire A dans le cas où le signe de la fonction f est variable sur $[a,b]$:

- on réalise la subdivision de l'intervalle $[a,b]$ en plusieurs intervalles de sorte que la fonction f garde un signe constant sur chacun d'eux.



- on calcule les aires arithmétiques des sous ensembles plan associés à

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815

TakiAcademy
www.takiacademy.com

à f sur chacun des intervalles de la subdivision.

📌 L'aire A est alors la somme des aire arithmétiques comme c'est indiqué sur la figure.

📌 Dans la figure $\mathcal{D} = D_1 \cup D_2 \cup D_3$

donc aire$(\mathcal{D})$ = aire(D_1) + aire (D_2) + aire(D_3)

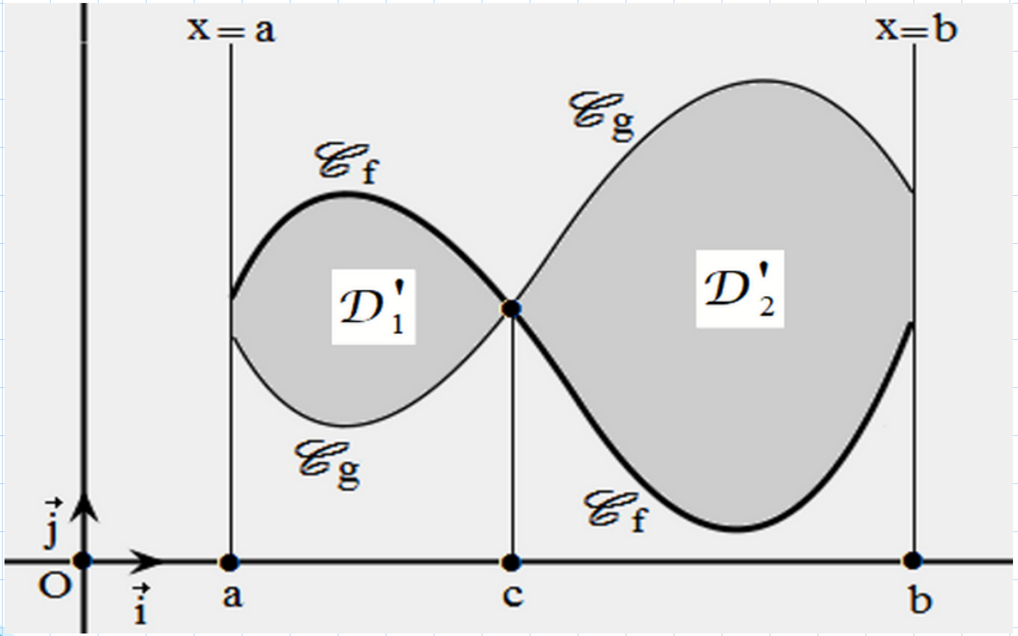
$$= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d -f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

📌 **Aire d'un domaine entre deux courbes:**

L'aire arithmétique du domaine du plan limité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est :

$$\mathcal{A}' = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
☎ 23390248 - 29862815



Sur $[a,c]$ on a : $|f-g| = f - g$

car $f \geqslant g$.

alors que sur $[c,b]$ on a : $|f-g| = g - f$

car $f \leqslant g$

$D' = D'_1 \cup D'_2$ donc

$$\mathcal{A}' = \int_a^c (f(x) - g(x))\,dx + \int_c^b (g(x) - f(x))\,dx$$

Tous droits réservés © TakiAcademy.com
23390248 - 29862815